

# **Raum und Zeit in Chemie und Physik: Die kontinuierlichen Noetherschen Symmetrien im Lichte der Statistischen Mechanik**

Thomas Zeuch

Institut für Physikalische Chemie  
Georg-August-Universität Göttingen

Mathematische Gesellschaft  
11.02.2021

# Bezüge zur Mathematik

Studium Mathematik und Chemie Lehramt

Spezialisierung Algebra, Prüfung in Algebra, Stochastik und DGL

Während Promotion Hiwi in Mathematik AGLA 1 und DIFF 2  
Vertiefung Bilinearformen (Ina Kersten)

Promotion Chemie mit Rigorosum in Algebra und Zahlentheorie

Seit Promotion: Numerische Simulationen in Chemischer Kinetik, eigene Experimente, Simulationen auch durch Partnergruppen

Seit 2008 Arbeitsgruppenleiter in Physikalischer Chemie, 2013 Habilitation, seit 2018 außerplanmäßiger Professor

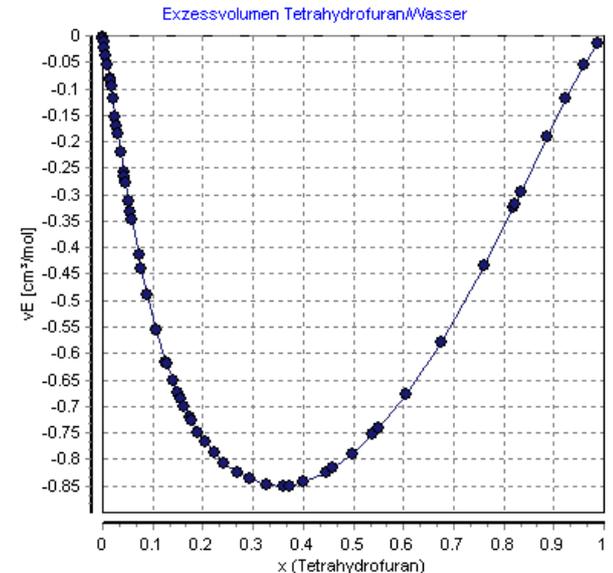
Seit 2016 Vorlesung Mathematik für Chemiker

# Bezüge zur Mathematik

(Differentialielle) Erhaltungsgrößen in physikalischer Chemie

Einfaches Beispiel aus Forschung und Lehre:  
Reale Mischung Alkohol - Wasser 2 zu 1

Gesamtvolumen schrumpft beim Mischen!  
Kann berechnet werden über  
„partielle Molvolumina“ (Quelle, Wikipedia)



1 ausgezeichneter Weg: Immer gleiche Verhältnisse 2 zu 1  
zugeben, partielle Molvolumina sind dann konstant, invariant

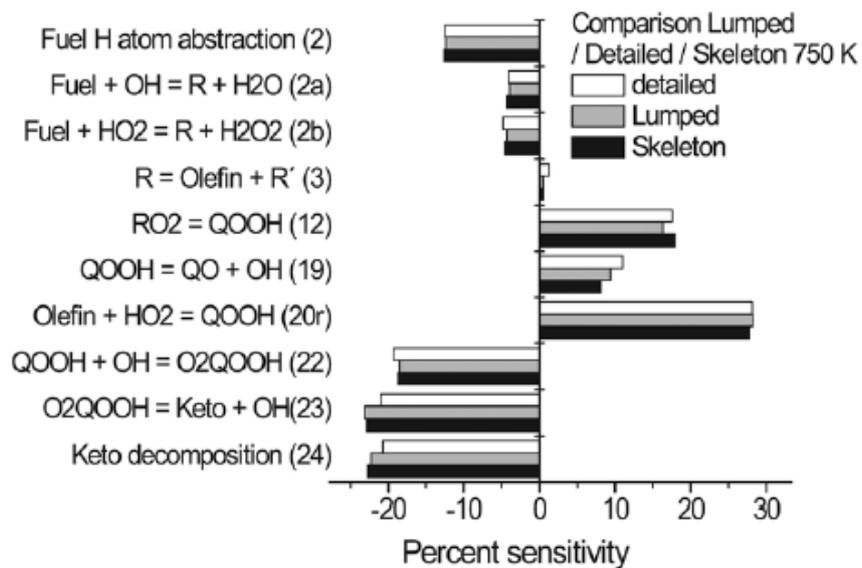
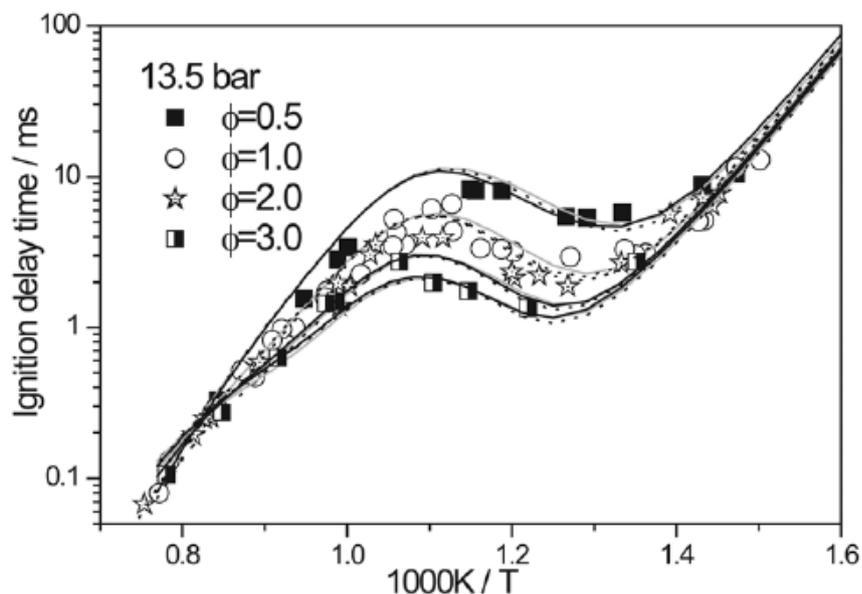
Schwingungsanalyse von Trimer  $(C_2H_5OH)_2H_2O$  zeigt  
mikroskopische Effekte, die makroskopische Beobachtung (zum  
Teil) erklären

# Bezüge zur Mathematik

Forschung, Mechanismenreduktion. Partielle Ableitungen für die empfindlichsten Reaktionen bleiben erhalten. (500 auf 110 Spezies),  $v = k[A][B]$ ,  $k = A \exp(E_A/RT)$

# Bezüge zur Mathematik

Forschung, Mechanismenreduktion. Partielle Ableitungen für die empfindlichsten Reaktionen bleiben erhalten. (500 auf 110 Spezies),  $v = k[A][B]$ ,  $k = A \exp(E_A/RT)$



# Bezüge zur Mathematik

Forschung, Mechanismenreduktion. Partielle Ableitungen für die empfindlichsten Reaktionen bleiben erhalten. (500 auf 110 Spezies),  $v = k[A][B]$ ,  $k = A \exp(E_A/RT)$

Simulation von Turbulenter Dieselmündung möglich, nicht möglich mit „überreduziertem“ Modell.



# Programm, Ausgangspunkt

Rolle der Zeit in Chemie, Physik und (?) Mathematik

## Beobachtung 1:

Lagrange-Multiplikatoren (z.B. Forster Diff. II), Extrema unter Nebenbedingungen. Was passiert beim Übergang von 1 zu 2 Nebenbedingungen? Lokal orthogonale Zerlegung des Vektorraums in Bewegungs-(generalisierte Koordinaten) und Orientierungsfreiheitsgrade. Stationäre Stelle: Gradient der Funktion ist Teil des orthogonalen „Orientierungsraums“. Keine Dynamik, Zeit spielt keine Rolle.

## Anwendung:

Dynamisierung des Befunds für Körper im Kraftfeld, wieder: Lokal orthogonale Zerlegung der Bahn in Geschwindigkeitsvektor und Orientierungen im Raum (zwei Winkel). Führt zur lokalen „Richtungsänderungsrate“. Ähnlich Maxwell-Gl.

# Programm, Ausgangspunkt

Rolle der Zeit in Chemie, Physik und (?) Mathematik

## Beobachtung 2:

Zeit ist in Quantenmechanik (nicht relativistisch) symmetrisch, stetig. Noethersche kontinuierliche Symmetrien von Zeit und Raum sind in der Chemie gebrochen (seit 1800 Atommodell Dalton).

Reaktionszeiten sind Erwartungswerte, Zeitpunkte nicht vorhersagbar.

Phasenübergang fest/flüssig: Makroskopisch spielt Zeit keine Rolle, mikroskopisch spielt sie die Rolle des Raums. Widersprüche zur Quantenmechanik?

## Lösungsansatz:

Frage nach mikroskopischen Kopplungen von Ort/Impuls und Energie/Zeit: Führt direkt zu Heisenbergscher Unschärferelation. Was gilt für Energie-Zeit? Hypothese: Imaginäre Phase wird in quasi-stationären Quantensystemen real, verallgemeinerte Eyring Theorie.

# Ausgangspunkt: Skript Mathematik für Chemiker

## 4.3 Extrema mit Nebenbedingungen

Gegeben ist eine Funktion  $F(x, y, z)$ .

Ein Extremum von  $F(x, y, z)$  ist durch Stationarität des Funktionswerts bezüglich Änderung von  $x, y, z$  gekennzeichnet, d.h.

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0 \quad (1)$$

Sind die Variablen  $x, y, z$  voneinander unabhängig, so folgt aus (1):

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

# Ausgangspunkt: Skript Mathematik für Chemiker

Ist durch eine Nebenbedingung  $g(x, y, z) = 0$  eine Abhängigkeit zwischen  $x, y, z$  gegeben, so kann man

$$dg = \frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy + \frac{\partial g}{\partial z}dz = 0.$$

zu (1) addieren und erhält

$$\begin{aligned} dF + \lambda dg &= dx \left( \frac{\partial F}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \right) \\ &+ dy \left( \frac{\partial F}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \right) \\ &+ dz \left( \frac{\partial F}{\partial z} + \lambda \frac{\partial g}{\partial z} \right) = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Die Größe  $\lambda$  heißt Lagrange-Multiplikator .

# Ausgangspunkt: Skript Mathematik für Chemiker

In (2) können zwei der Differentiale frei gewählt werden; das dritte ist dann durch die Nebenbedingung festgelegt.

Durch geeignete Wahl von  $\lambda$  erreicht man nun, dass einer der Klammerausdrücke verschwindet. Die beiden anderen Klammerausdrücke müssen dann ebenfalls Null werden, da zwei der Differentiale unabhängig sind:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} + \lambda \frac{\partial g}{\partial z} = 0$$

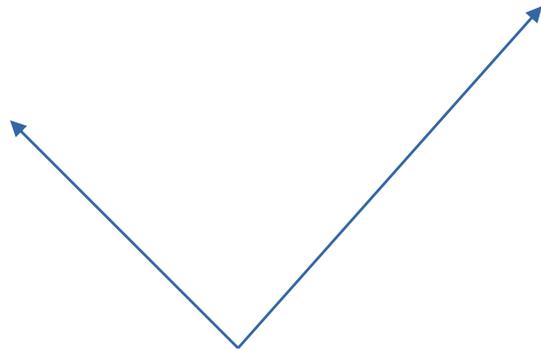
Zusammen mit der Nebenbedingung  $g(x, y, z) = 0$  sind dies 4 Gleichungen zur Bestimmung der 4 Unbekannten  $x, y, z, \lambda$ .

Diese 4 Gleichungen erhält man auch, indem man die partiellen Ableitungen der Funktion

$$G(x, y, z, \lambda) = F(x, y, z) + \lambda g(x, y, z)$$

gleich Null setzt. Dies ist äquivalent zur Bestimmung der Extrema der Funktion  $G(x, y, z, \lambda)$  ohne Nebenbedingung.

Linear Geometrische Deutung: 2d auf 1d durch 1 Nebenbedingung



Gradient lokal senkrecht:

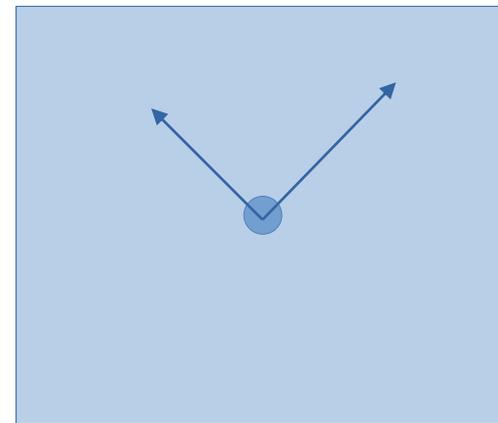
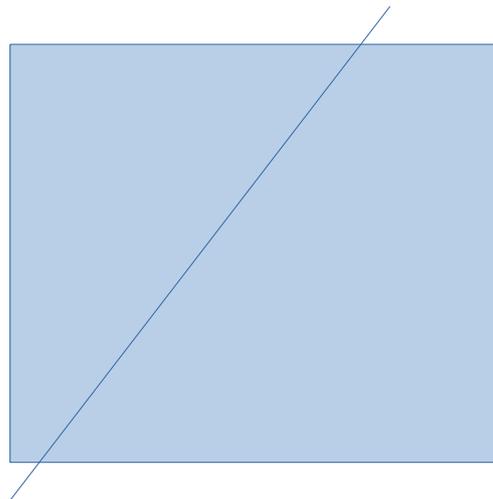
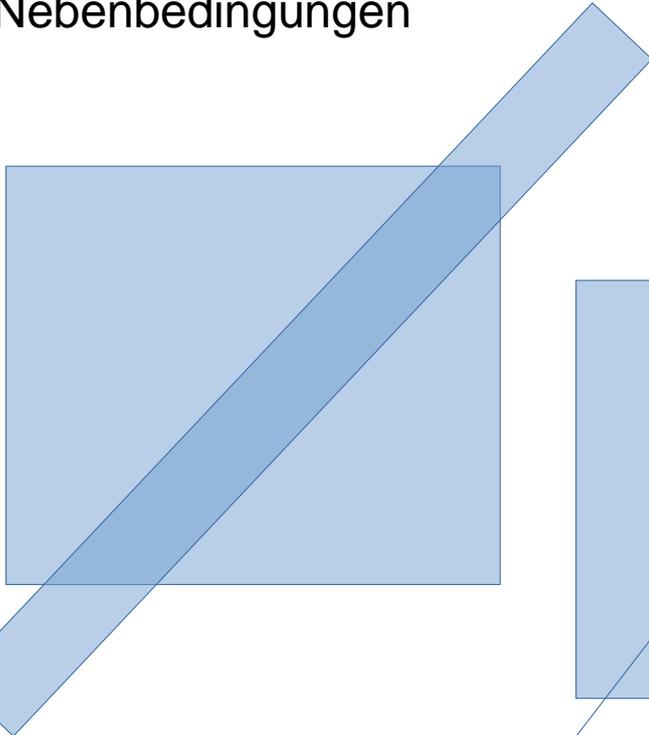
Keine Kraft in Wegrichtung!  
Stationäre Stelle (Steigung 0)

Nur Länge/Vorzeichen des Gradient variabel:  
1 Lagrange Multiplikator

Linear Geometrische Deutung: 3d auf 1d durch 2

Nebenbedingungen

Jede Nebenbedingung reduziert 3d auf 2d, also auf Fläche. Wenn beide gleichzeitig erfüllt sind: Flächenschnitt ist Kurve, hier idealisiert Gerade! Das ist der neue Definitionsbereich von  $F$ !



Alle Richtungen in der Ebene sind orthogonal zu Wegrichtung:  
2 Lagrange-Multiplikatoren + 2 Richtungsvektoren (Pseudogradienten der Nebenbedingungen) erzeugen alle möglichen orthogonalen Richtungen des Gradienten!

# G ist die Lagrange-Funktion!

Formalismus: Nebenbedingungen führen zu neuem, reduziertem Koordinatensystem, ein variabler Winkel reicht z.B. für Pendel-Bewegung in der Fläche

Lagrange-Funktion (typischerweise L statt F):

$L = T - V$  (Kinetische Energie – Potentielle Energie)

Lagrange-Bewegungsgleichung:

$$d/dt p (=mv)$$

$$= m \cdot a = F$$

Newton!

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Die Beschleunigung in diesen generalisierten Koordinaten entspricht den (gehebelten) Gradienten in den generalisierten Koordinaten. Ist sie 0: Extrema unter Nebenbedingungen.

$dq^*$ : Ableitung nach  $v$ : 0 für Potentielle Energie (**kinematische Info wird „weggeworfen“!**), „reduzierte Impulse“ für T:

$$dE_{\text{kin}}/dv = mv = p; E_{\text{kin}} = m/2 v^2$$

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{q})$$

Hamilton-Funktion  
in einfachster Form

Eine Legendre-Transformation führt nun zur Hamilton-Funktion (und zur Quantenmechanik)  
**„Energielandschaft“: explizit, Kinematik: implizit: Freiheit der Wegparametrisierung!**

## Naturgesetz als Variationsproblem

Wir betrachten das Variationsproblem

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(x, \dot{x}, t) dt = 0$$

mit der sogenannten Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}, t) = T_{\text{kin}} - U_{\text{pot}} = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - U_{\text{pot}}(x, t)$$

Die Euler-Lagrange-Gleichung lautet

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial \mathcal{L}(x, \dot{x}, t)}{\partial x}$$

oder

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = - \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} = F(x, t)$$

Der Ausgangspunkt  $\delta \int \mathcal{L} dt = 0$  ist äquivalent zu diesem Newton'schen Axiom.

Der Ausgangspunkt heißt Hamilton'sches Prinzip:

$$\text{Hamilton'sches Prinzip: } \delta \int \mathcal{L} dt = 0$$

Dies gilt auch für ein mechanisches System mit vielen Freiheitsgraden. Dann ist  $\mathcal{L}(x, \dot{x}, t) = \mathcal{L}(x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n, t)$ . Darüberhinaus ist das Hamilton'sche Prinzip auch auf nicht-mechanische Systeme anwendbar.

Viele Grundgleichungen der Physik können in der Form des Hamilton'schen Prinzips  $\delta \int \mathcal{L} dt = 0$  angegeben werden. So sind zum Beispiel die freien Maxwellgleichungen die Euler-Lagrange-Gleichungen für

$$\mathcal{L} = \int d^3r (E^2 - B^2)$$

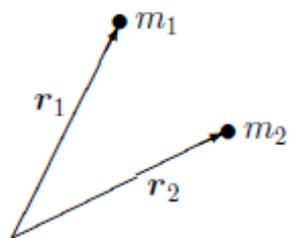
Dieses  $\mathcal{L}$  ist der *einfachste* Ansatz, der den einschlägigen *Symmetrien* (Homogenität der Zeit, Isotropie des Raums und Relativität der Raum-Zeit) genügt. Diese Aussage (**Einfachheits- und Symmetrieforderung**) gilt entsprechend für andere Naturgesetze. Die Lagrangefunktion (oder Lagrangedichte, hier  $L = E^2 - B^2$ ) ist daher *der* Ausgangspunkt bei der Aufstellung neuer Theorien (etwa für eine Modifikation der Maxwellgleichungen).

## Symmetrie und Erhaltungsgröße

Emmy Noethers Bedeutung für die Physik

von T. Fließbach

# Keplerproblem



$$\mathbf{r}_1 := (x_1, y_1, z_1)$$

$$\mathbf{r}_2 := (x_2, y_2, z_2)$$

$$T_{\text{kin}} = \frac{m_1}{2} \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\mathbf{r}}_2^2$$

$$U_{\text{pot}} = -\frac{G m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

Zwei Körper (Sonne und Planet) bewegen sich unter dem Einfluss ihrer gegenseitigen Schwerkraft. Gesucht sind die Bahnen  $\mathbf{r}_1(t)$  und  $\mathbf{r}_2(t)$ .

## Symmetrie und Erhaltungsgröße

Emmy Noethers Bedeutung für die Physik

von T. Fließbach

Newtons Axiome:  $m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \dots$  und  $m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \dots$

6 DGL 2. Ordnung

↓  
 Translationsinvarianz, Operation  $\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}_i + \mathbf{a}$   
 Schwerpunktimpuls-Erhaltung:  $\mathbf{P} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \text{const.}$

Relativbewegung:  $\mu \ddot{\mathbf{r}} = \dots$ , wobei  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  und  
 3 DGL 2. Ordnung  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$

↓  
 Drehinvarianz, Operation  $\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}_i + d\varphi \times \mathbf{r}_i$   
 Drehimpuls-Erhaltung:  $\ell = \mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \text{const.}$

Abstandsbewegung:  $\mu \ddot{r} = \dots$

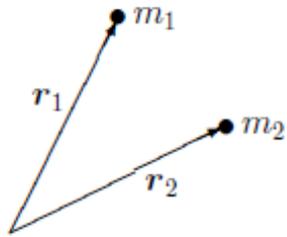
1 DGL 2. Ordnung

↓  
 Zeittranslations-Invarianz, Operation  $t \rightarrow t + t_0$   
 Energie-Erhaltung:  $E = \text{const.}$

1 DGL 1. Ordnung für  $r(t)$ :

$$E = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2\mu r^2} + U_{\text{pot}}(r)$$

# Keplerproblem



$$\mathbf{r}_1 := (x_1, y_1, z_1)$$

$$\mathbf{r}_2 := (x_2, y_2, z_2)$$

$$T_{\text{kin}} = \frac{m_1}{2} \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\mathbf{r}}_2^2$$

$$U_{\text{pot}} = -\frac{G m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

Zwei Körper (Sonne und Planet) bewegen sich unter dem Einfluss ihrer gegenseitigen Schwerkraft. Gesucht sind die Bahnen  $\mathbf{r}_1(t)$  und  $\mathbf{r}_2(t)$ .

## Symmetrie und Erhaltungsgröße

Emmy Noethers Bedeutung für die Physik

von T. Fließbach

## Energien explizit gegeben

Newtons Axiome:  $m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \dots$  und  $m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \dots$

6 DGL 2. Ordnung

↓  
 Translationsinvarianz, Operation  $\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}_i + \mathbf{a}$   
 Schwerpunktimpuls-Erhaltung:  $\mathbf{P} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \text{const.}$

Relativbewegung:  $\mu \ddot{\mathbf{r}} = \dots$ , wobei  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  und  
 3 DGL 2. Ordnung  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$

↓  
 Drehinvarianz, Operation  $\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}_i + d\varphi \times \mathbf{r}_i$   
 Drehimpuls-Erhaltung:  $\ell = \mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \text{const.}$

Abstandsbewegung:  $\mu \ddot{r} = \dots$

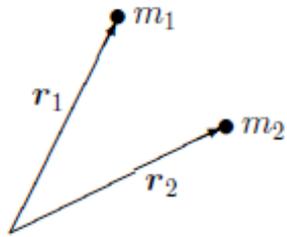
1 DGL 2. Ordnung

↓  
 Zeittranslations-Invarianz, Operation  $t \rightarrow t + t_0$   
 Energie-Erhaltung:  $E = \text{const.}$

1 DGL 1. Ordnung für  $r(t)$ :

$$E = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2\mu r^2} + U_{\text{pot}}(r)$$

# Keplerproblem



$$\mathbf{r}_1 := (x_1, y_1, z_1)$$

$$\mathbf{r}_2 := (x_2, y_2, z_2)$$

$$T_{\text{kin}} = \frac{m_1}{2} \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\mathbf{r}}_2^2$$

$$U_{\text{pot}} = -\frac{G m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

Zwei Körper (Sonne und Planet) bewegen sich unter dem Einfluss ihrer gegenseitigen Schwerkraft. Gesucht sind die Bahnen  $\mathbf{r}_1(t)$  und  $\mathbf{r}_2(t)$ .

Newtons Axiome:  $m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \dots$  und  $m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \dots$

6 DGL 2. Ordnung

↓  
 Translationsinvarianz, Operation  $\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}_i + \mathbf{a}$   
 Schwerpunktimpuls-Erhaltung:  $\mathbf{P} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \text{const.}$

Relativbewegung:  $\mu \ddot{\mathbf{r}} = \dots$ , wobei  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  und  
 3 DGL 2. Ordnung  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$

↓  
 Drehinvarianz, Operation  $\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}_i + d\varphi \times \mathbf{r}_i$   
 Drehimpuls-Erhaltung:  $\ell = \mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \text{const.}$

Abstandsbewegung:  $\mu \ddot{r} = \dots$

1 DGL 2. Ordnung

↓  
 Zeittranslations-Invarianz, Operation  $t \rightarrow t + t_0$   
 Energie-Erhaltung:  $E = \text{const.}$

1 DGL 1. Ordnung für  $r(t)$ :

$$E = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2\mu r^2} + U_{\text{pot}}(r)$$

# Symmetrie und Erhaltungsgröße

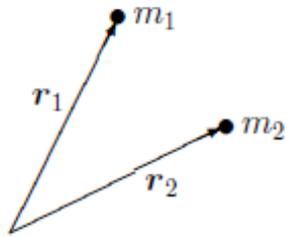
Emmy Noethers Bedeutung für die Physik

von T. Fließbach

**Energien explizit gegeben**

**Symmetrien und Erhaltungsgrößen gelten global!**

# Keplerproblem



$$\mathbf{r}_1 := (x_1, y_1, z_1)$$

$$\mathbf{r}_2 := (x_2, y_2, z_2)$$

$$T_{\text{kin}} = \frac{m_1}{2} \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\mathbf{r}}_2^2$$

$$U_{\text{pot}} = -\frac{G m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

Zwei Körper (Sonne und Planet) bewegen sich unter dem Einfluss ihrer gegenseitigen Schwerkraft. Gesucht sind die Bahnen  $\mathbf{r}_1(t)$  und  $\mathbf{r}_2(t)$ .

Newtons Axiome:  $m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \dots$  und  $m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \dots$

6 DGL 2. Ordnung

↓  
 Translationsinvarianz, Operation  $\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}_i + \mathbf{a}$   
 Schwerpunktimpuls-Erhaltung:  $\mathbf{P} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \text{const.}$

Relativbewegung:  $\mu \ddot{\mathbf{r}} = \dots$ , wobei  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  und  
 3 DGL 2. Ordnung  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$

↓  
 Drehinvarianz, Operation  $\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}_i + d\varphi \times \mathbf{r}_i$   
 Drehimpuls-Erhaltung:  $\ell = \mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \text{const.}$

Abstandsbewegung:  $\mu \ddot{r} = \dots$

1 DGL 2. Ordnung

↓  
 Zeittranslations-Invarianz, Operation  $t \rightarrow t + t_0$   
 Energie-Erhaltung:  $E = \text{const.}$

1 DGL 1. Ordnung für  $r(t)$ :

$$E = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2\mu r^2} + U_{\text{pot}}(r)$$

# Symmetrie und Erhaltungsgröße

Emmy Noethers Bedeutung für die Physik

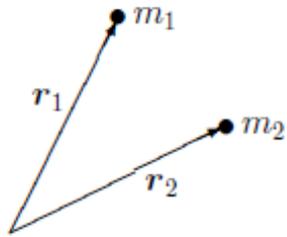
von T. Fließbach

**Energien explizit gegeben**

**Symmetrien und Erhaltungsgrößen gelten global!**

**Sie reduzieren kompliziertes DGL-System auf ein analytisch lösbares!**

# Keplerproblem



$$\mathbf{r}_1 := (x_1, y_1, z_1)$$

$$\mathbf{r}_2 := (x_2, y_2, z_2)$$

$$T_{\text{kin}} = \frac{m_1}{2} \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\mathbf{r}}_2^2$$

$$U_{\text{pot}} = -\frac{G m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

Zwei Körper (Sonne und Planet) bewegen sich unter dem Einfluss ihrer gegenseitigen Schwerkraft. Gesucht sind die Bahnen  $\mathbf{r}_1(t)$  und  $\mathbf{r}_2(t)$ .

Newtons Axiome:  $m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \dots$  und  $m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \dots$

6 DGL 2. Ordnung

↓  
 Translationsinvarianz, Operation  $\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}_i + \mathbf{a}$   
 Schwerpunktimpuls-Erhaltung:  $\mathbf{P} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \text{const.}$

Relativbewegung:  $\mu \ddot{\mathbf{r}} = \dots$ , wobei  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  und  
 3 DGL 2. Ordnung  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$

↓  
 Drehinvarianz, Operation  $\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}_i + d\varphi \times \mathbf{r}_i$   
 Drehimpuls-Erhaltung:  $\ell = \mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \text{const.}$

Abstandsbewegung:  $\mu \ddot{r} = \dots$

1 DGL 2. Ordnung

↓  
 Zeittranslations-Invarianz, Operation  $t \rightarrow t + t_0$   
 Energie-Erhaltung:  $E = \text{const.}$

1 DGL 1. Ordnung für  $r(t)$ :

$$E = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2\mu r^2} + U_{\text{pot}}(r)$$

# Symmetrie und Erhaltungsgröße

Emmy Noethers Bedeutung für die Physik

von T. Fließbach

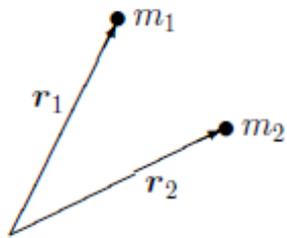
**Energien explizit gegeben**

**Symmetrien und Erhaltungsgrößen gelten global!**

**Sie reduzieren kompliziertes DGL-System auf ein analytisch lösbares!**

**Analytische Lösungen beschreiben instantan die komplette Bahn**

# Keplerproblem



$$\mathbf{r}_1 := (x_1, y_1, z_1)$$

$$\mathbf{r}_2 := (x_2, y_2, z_2)$$

$$T_{\text{kin}} = \frac{m_1}{2} \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\mathbf{r}}_2^2$$

$$U_{\text{pot}} = -\frac{G m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

Zwei Körper (Sonne und Planet) bewegen sich unter dem Einfluss ihrer gegenseitigen Schwerkraft. Gesucht sind die Bahnen  $\mathbf{r}_1(t)$  und  $\mathbf{r}_2(t)$ .

Newtons Axiome:  $m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \dots$  und  $m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \dots$

6 DGL 2. Ordnung

↓  
 Translationsinvarianz, Operation  $\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}_i + \mathbf{a}$   
 Schwerpunktimpuls-Erhaltung:  $\mathbf{P} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \text{const.}$

Relativbewegung:  $\mu \ddot{\mathbf{r}} = \dots$ , wobei  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  und  
 3 DGL 2. Ordnung  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$

↓  
 Drehinvarianz, Operation  $\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}_i + d\varphi \times \mathbf{r}_i$   
 Drehimpuls-Erhaltung:  $\ell = \mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \text{const.}$

Abstandsbewegung:  $\mu \ddot{r} = \dots$

1 DGL 2. Ordnung

↓  
 Zeittranslations-Invarianz, Operation  $t \rightarrow t + t_0$   
 Energie-Erhaltung:  $E = \text{const.}$

1 DGL 1. Ordnung für  $r(t)$ :

$$E = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2\mu r^2} + U_{\text{pot}}(r)$$

# Symmetrie und Erhaltungsgröße

Emmy Noethers Bedeutung für die Physik

von T. Fließbach

## Energien explizit gegeben

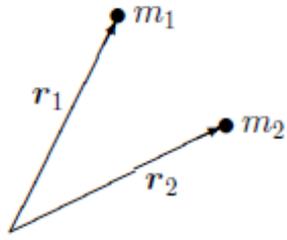
**Symmetrien und Erhaltungsgrößen gelten global!**

**Sie reduzieren kompliziertes DGL-System auf ein analytisch lösbares!**

**Analytische Lösungen beschreiben instantan die komplette Bahn**

**Kinematik ist versteckt, muss durch Animation oder Vektordarstellung sichtbar gemacht werden!**

# Keplerproblem



$$\mathbf{r}_1 := (x_1, y_1, z_1)$$

$$\mathbf{r}_2 := (x_2, y_2, z_2)$$

$$T_{\text{kin}} = \frac{m_1}{2} \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\mathbf{r}}_2^2$$

$$U_{\text{pot}} = -\frac{G m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

Zwei Körper (Sonne und Planet) bewegen sich unter dem Einfluss ihrer gegenseitigen Schwerkraft. Gesucht sind die Bahnen  $\mathbf{r}_1(t)$  und  $\mathbf{r}_2(t)$ .

Newtons Axiome:  $m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \dots$  und  $m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \dots$

6 DGL 2. Ordnung

↓  
 Translationsinvarianz, Operation  $\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}_i + \mathbf{a}$   
 Schwerpunktimpuls-Erhaltung:  $\mathbf{P} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \text{const.}$

Relativbewegung:  $\mu \ddot{\mathbf{r}} = \dots$ , wobei  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  und  
 3 DGL 2. Ordnung  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$

↓  
 Drehinvarianz, Operation  $\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}_i + d\varphi \times \mathbf{r}_i$   
 Drehimpuls-Erhaltung:  $\ell = \mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \text{const.}$

Abstandsbewegung:  $\mu \ddot{r} = \dots$   
 1 DGL 2. Ordnung

↓  
 Zeittranslations-Invarianz, Operation  $t \rightarrow t + t_0$   
 Energie-Erhaltung:  $E = \text{const.}$

1 DGL 1. Ordnung für  $r(t)$ :

$$E = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2\mu r^2} + U_{\text{pot}}(r)$$

# Symmetrie und Erhaltungsgröße

Emmy Noethers Bedeutung für die Physik

von T. Fließbach

## Energien explizit gegeben

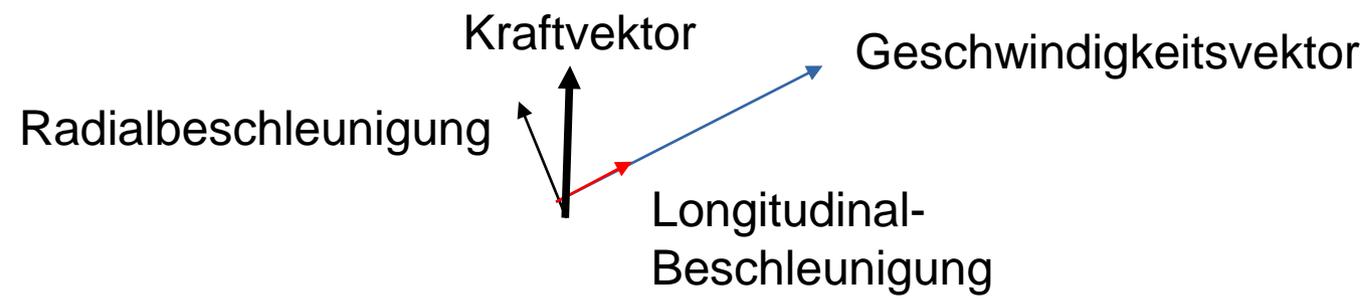
**Symmetrien und Erhaltungsgrößen gelten global!**

**Sie reduzieren kompliziertes DGL-System auf ein analytisch lösbares!**

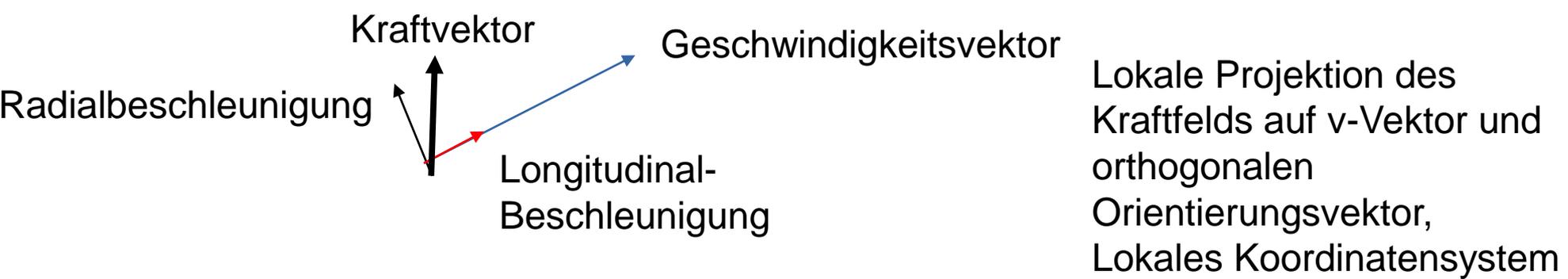
**Analytische Lösungen beschreiben instantan die komplette Bahn**

**Kinematik ist versteckt, muss durch Animation oder Vektordarstellung sichtbar gemacht werden!**

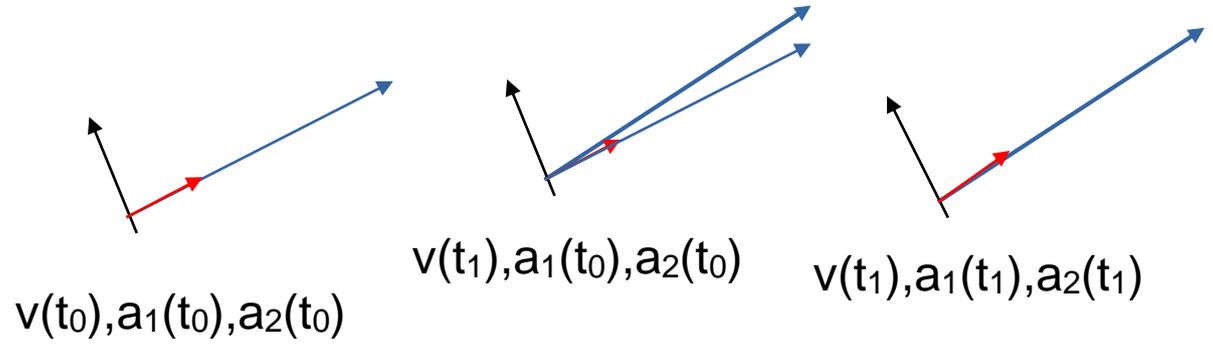
**Nun Umkehrung: Lokale Betrachtung, Zeit explizit und Bahn implizit. Energie implizit, lokale Dynamik explizit (v(t) und a(t))**

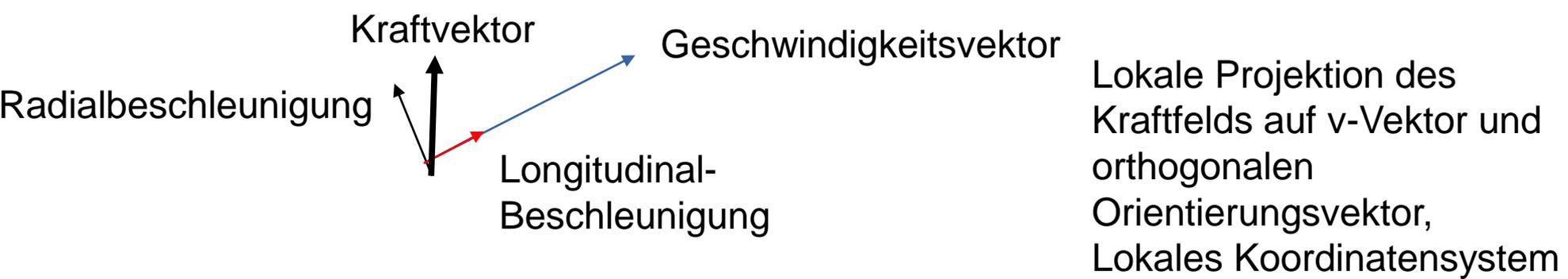


Lokale Projektion des Kraftfelds auf v-Vektor und orthogonalen Orientierungsvektor, Lokales Koordinatensystem

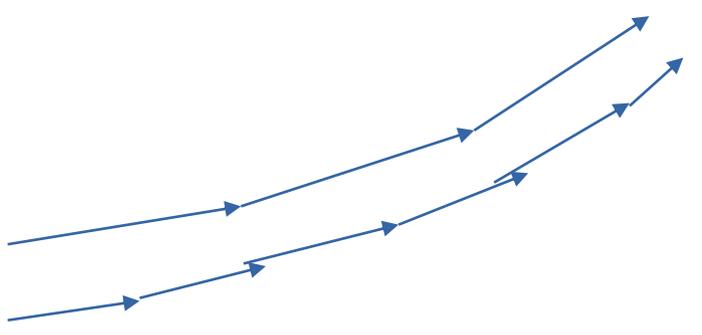
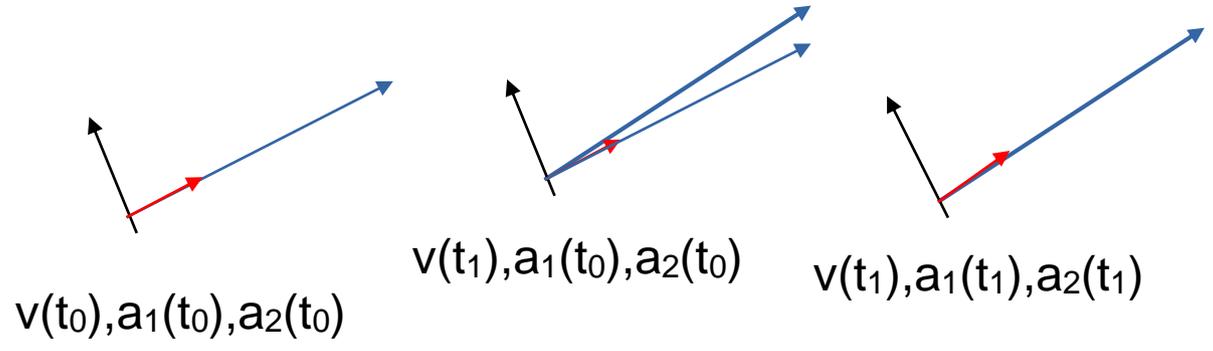


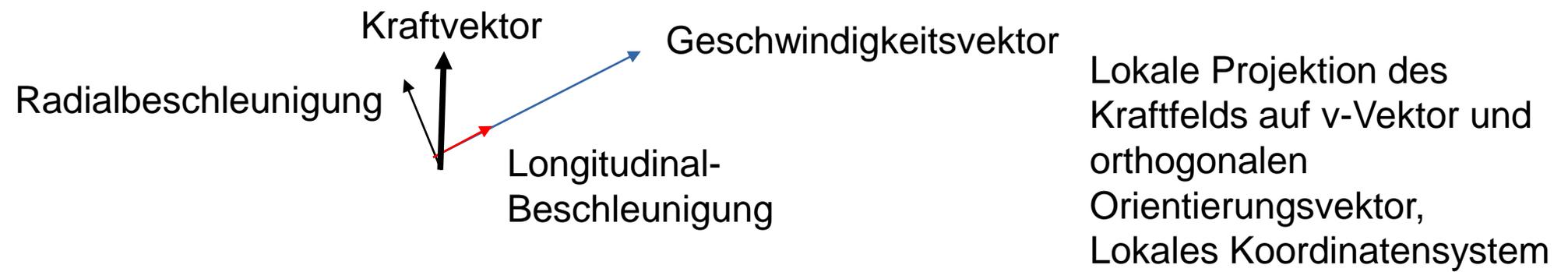
Ein Zeitschritt:



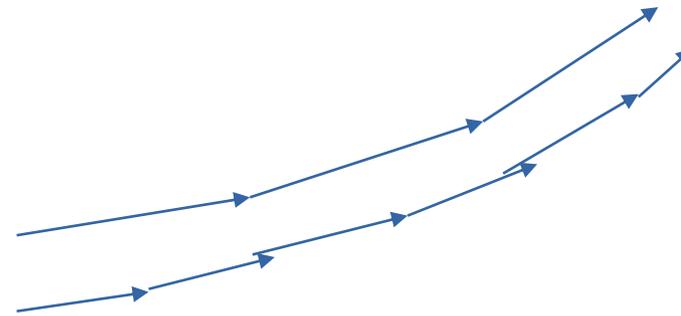
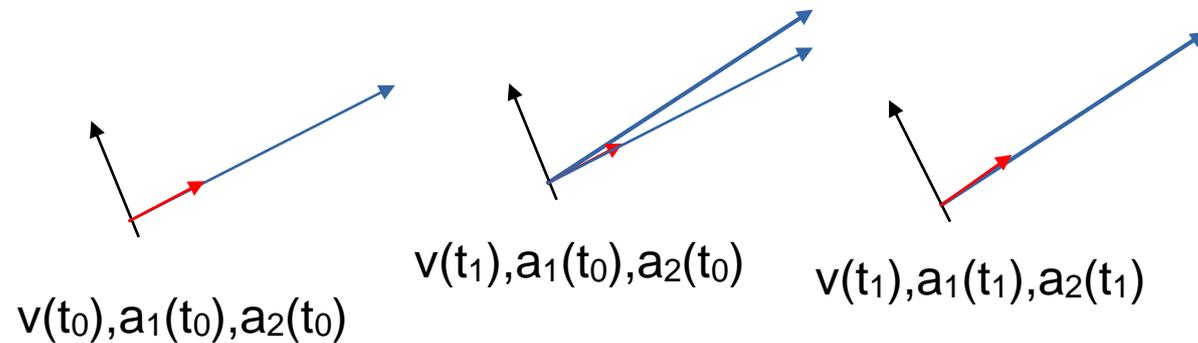


Ein Zeitschritt:





Ein Zeitschritt:



**Serie der Geschwindigkeitsvektoren ist lokal für gewählte Zeitschritte fixiert. Kinematik explizit, bei Euler-Lagrange implizit (Wirkungsminimierung).**

**Integrationsschritt: Lineare, lokale zeitliche Expansion liefert Wegelement! Üblich sind Kraftvektor (Kurvenintegral), Flussvektor (Oberflächenintegral) oder Skalare (Euler-Lagrange, Volumenintegral)!**

**Delta t gegen 0: Relaxation auf „implizite Bahn“, immer explizite Zeitpunkte.**

**Kinematisches Vektorfeld mit linear orthogonalisierter lokaler Dynamik zum Zeitpunkt  $t = n\Delta t$ , im  $n$ 'ten Zeitschritt**

$$\vec{V}(t(= n \cdot \Delta t), \Delta t) = \begin{pmatrix} v(t) + \frac{a(t) \cdot \Delta t}{2} \\ \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \end{pmatrix}$$

**Kinematisches Vektorfeld mit linear orthogonalisierter lokaler Dynamik zum Zeitpunkt  $t = n\Delta t$ , im  $n$ 'ten Zeitschritt**

$$\vec{V}(t(= n \cdot \Delta t), \Delta t) = \begin{pmatrix} v(t) + \frac{a(t) \cdot \Delta t}{2} \\ \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(t) + \frac{a(t) \cdot \Delta t}{2} \\ \omega_1(t) + \frac{d}{dt} \omega_1 \frac{\Delta t}{2} \\ \omega_2(t) + \frac{d}{dt} \omega_2 \frac{\Delta t}{2} \end{pmatrix}$$

**Kinematisches Vektorfeld mit linear orthogonalisierter lokaler Dynamik zum Zeitpunkt  $t = n\Delta t$ , im  $n$ 'ten Zeitschritt**

$$\vec{V}(t(= n \cdot \Delta t), \Delta t) = \begin{pmatrix} v(t) + \frac{a(t) \cdot \Delta t}{2} \\ \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \end{pmatrix}$$

## Kinematisches Vektorfeld mit linear orthogonalisierter lokaler Dynamik zum Zeitpunkt $t = n\Delta t$ , im $n$ 'ten Zeitschritt

$$\vec{V}(t(= n \cdot \Delta t), \Delta t) = \begin{pmatrix} v(t) + \frac{a(t) \cdot \Delta t}{2} \\ \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \end{pmatrix}$$

„Zeitliche Differentialintegration“ mit Komponenten Geschwindigkeit, Längs- und Radialbeschleunigungen, v-Vektor orthogonalisiert den Raum in Bewegungsrichtung und Orientierung

## Kinematisches Vektorfeld mit linear orthogonalisierter lokaler Dynamik zum Zeitpunkt $t = n\Delta t$ , im $n$ 'ten Zeitschritt

$$\vec{V}(t(= n \cdot \Delta t), \Delta t) = \begin{pmatrix} v(t) + \frac{a(t) \cdot \Delta t}{2} \\ \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \end{pmatrix}$$

„Zeitliche Differentialintegration“ mit Komponenten Geschwindigkeit, Längs- und Radialbeschleunigungen, v-Vektor orthogonalisiert den Raum in Bewegungsrichtung und Orientierung

Wirkung des  $n$ 'ten Zeitschritts auf den Ortsvektor der Bahn

$$\vec{r}_{n+1}(t + \Delta t) = \vec{r}_n(t) + \vec{v}_n(t, \Delta t)$$

## Kinematisches Vektorfeld mit linear orthogonalisierter lokaler Dynamik zum Zeitpunkt $t = n\Delta t$ , im $n$ 'ten Zeitschritt

$$\vec{V}(t(= n \cdot \Delta t), \Delta t) = \begin{pmatrix} v(t) + \frac{a(t) \cdot \Delta t}{2} \\ \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \end{pmatrix}$$

„Zeitliche Differentialintegration“ mit Komponenten Geschwindigkeit, Längs- und Radialbeschleunigungen, v-Vektor orthogonalisiert den Raum in Bewegungsrichtung und Orientierung

Wirkung des  $n$ 'ten Zeitschritts auf den Ortsvektor der Bahn

$$\vec{r}_{n+1}(t + \Delta t) = \vec{r}_n(t) + \vec{v}_n(t, \Delta t)$$

Zeitliche Expansion (Streck-Drehung, F-Theorie?) des Geschwindigkeitsvektors

$$\vec{v}_n(t, \Delta t) = D_{\omega_1(t), \Delta t} \left( D_{\omega_2(t), \Delta t} \left( \frac{\vec{v}_{n-1}}{\|\vec{v}_{n-1}\|} \cdot \left( v(t) + \frac{a(t) \cdot \Delta t}{2} \right) \right) \right)$$

## Kinematisches Vektorfeld mit linear orthogonalisierter lokaler Dynamik zum Zeitpunkt $t = n\Delta t$ , im $n$ 'ten Zeitschritt

$$\vec{V}(t(= n \cdot \Delta t), \Delta t) = \begin{pmatrix} v(t) + \frac{a(t) \cdot \Delta t}{2} \\ \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \end{pmatrix}$$

„Zeitliche Differentialintegration“ mit Komponenten Geschwindigkeit, Längs- und Radialbeschleunigungen, v-Vektor orthogonalisiert den Raum in Bewegungsrichtung und Orientierung

Wirkung des  $n$ 'ten Zeitschritts auf den Ortsvektor der Bahn

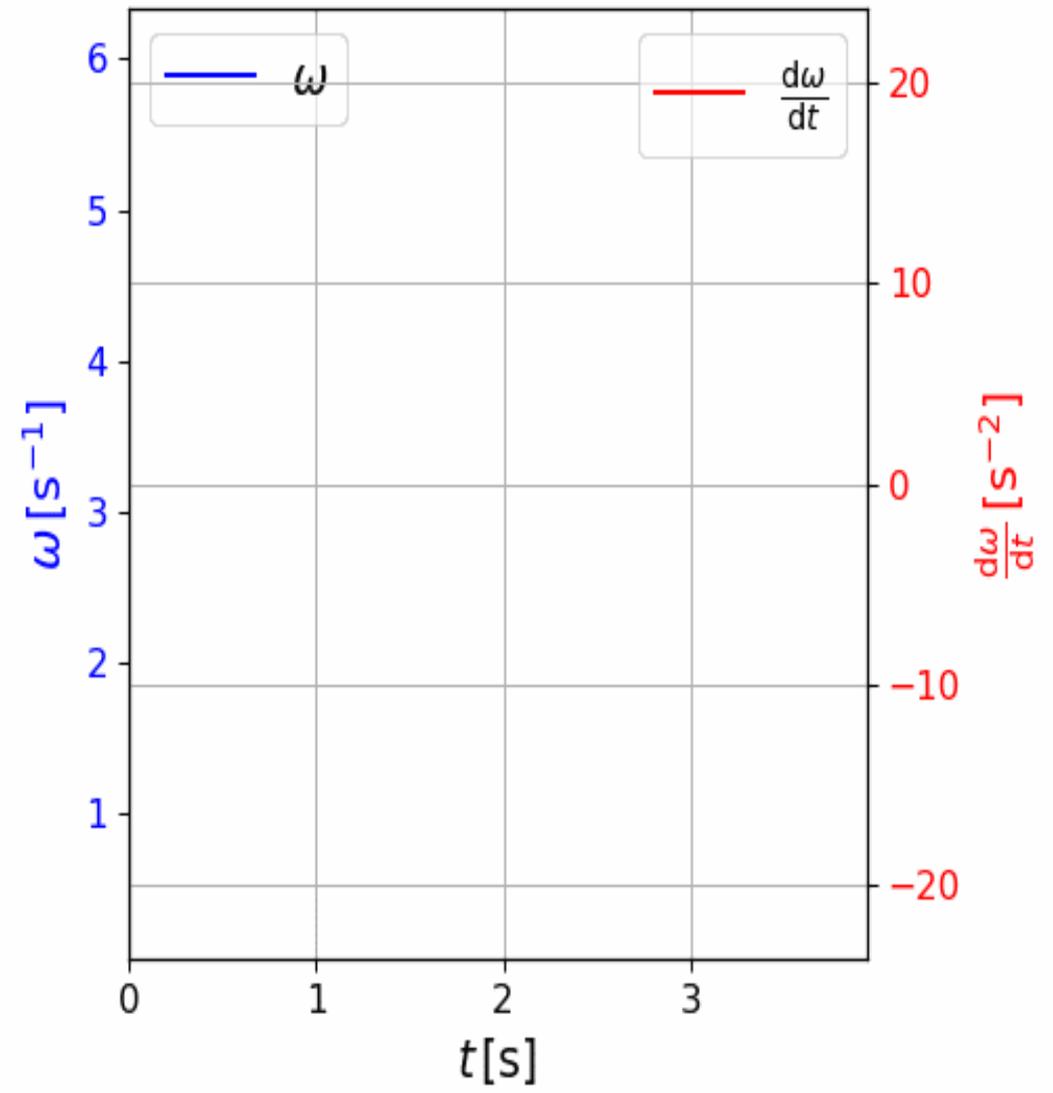
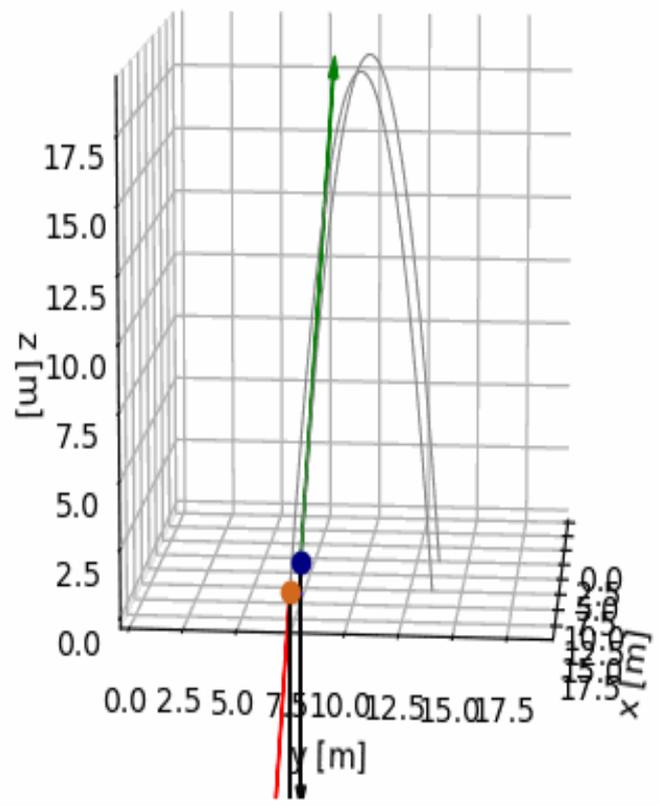
$$\vec{r}_{n+1}(t + \Delta t) = \vec{r}_n(t) + \vec{v}_n(t, \Delta t)$$

Zeitliche Expansion (Streck-Drehung, F-Theorie?) des Geschwindigkeitsvektors

$$\vec{v}_n(t, \Delta t) = D_{\omega_1(t), \Delta t} \left( D_{\omega_2(t), \Delta t} \left( \frac{\vec{v}_{n-1}}{\|\vec{v}_{n-1}\|} \cdot \left( v(t) + \frac{a(t) \cdot \Delta t}{2} \right) \right) \right)$$

$n$ 'te Bahn und Dynamik auf dieser Bahn ist komplett enthalten in Satz der

$$\vec{V}(t(= n \cdot \Delta t), \Delta t) \quad \vec{v}_n(t, \Delta t)$$



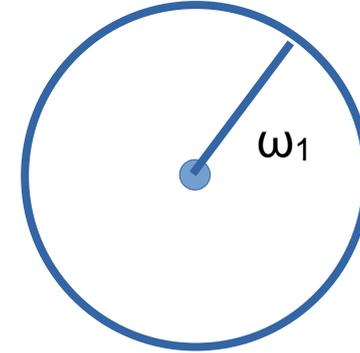
**Analogie zu partiellen Ableitungen: Lokale zeitliche Expansionen mit „natürlichen“ Zwangskräften, lokale Symmetrieerhaltung**

# Analogie zu partiellen Ableitungen: Lokale zeitliche Expansionen mit „natürlichen“ Zwangskräften, lokale Symmetrienerhaltung

## Natürliche Zwangskräfte Typ 1:

Längsbeschleunigung aus:  $v = \text{const.}$ , nur ein „Omega“ an: Nur noch Kreisbahnen, Drehimpulserhaltung

$$\vec{V}(t(= n \cdot \Delta t), \Delta t) = \begin{pmatrix} v(t) + \frac{a(t) \Delta t}{2} \\ \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \end{pmatrix}$$

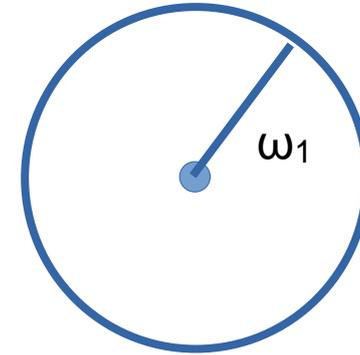


# Analogie zu partiellen Ableitungen: Lokale zeitliche Expansionen mit „natürlichen“ Zwangskräften, lokale Symmetrienerhaltung

## Natürliche Zwangskräfte Typ 1:

Längsbeschleunigung aus:  $v = \text{const.}$ , nur ein „Omega“ an: Nur noch Kreisbahnen, Drehimpulserhaltung

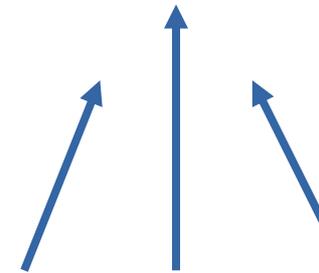
$$\vec{V}(t(= n \cdot \Delta t), \Delta t) = \begin{pmatrix} v(t) + \frac{a(t) \cdot \Delta t}{2} \\ \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \end{pmatrix}$$



## Natürliche Zwangskraft Typ 2:

Querbeschleunigungen aus:  $\omega_1 = \omega_2 = 0$ . Zwangskraft an, die alle Bahnen auf Geraden zwingt, (Schwerpunkt)Impulserhaltung.

$$\vec{V}(t(= n \cdot \Delta t), \Delta t) = \begin{pmatrix} v(t) + \frac{a(t) \cdot \Delta t}{2} \\ \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \end{pmatrix}$$



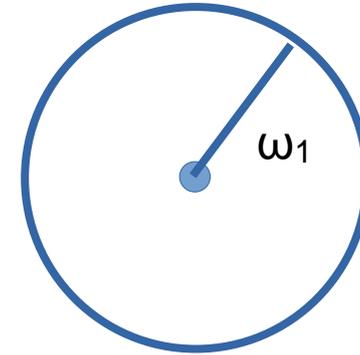
Schwerpunktimpuls-Erhaltung:  $\mathbf{P} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \text{const.}$

# Analogie zu partiellen Ableitungen: Lokale zeitliche Expansionen mit „natürlichen“ Zwangskräften, lokale Symmetrienerhaltung

## Natürliche Zwangskräfte Typ 1:

Längsbeschleunigung aus:  $v = \text{const.}$ , nur ein „Omega“ an: Nur noch Kreisbahnen, Drehimpulserhaltung

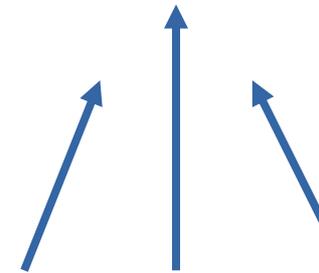
$$\vec{V}(t(= n \cdot \Delta t), \Delta t) = \begin{pmatrix} v(t) + \frac{a(t) \cdot \Delta t}{2} \\ \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \end{pmatrix}$$



## Natürliche Zwangskraft Typ 2:

Querbeschleunigungen aus:  $\omega_1 = \omega_2 = 0$ . Zwangskraft an, die alle Bahnen auf Geraden zwingt, (Schwerpunkt)Impulserhaltung.

$$\vec{V}(t(= n \cdot \Delta t), \Delta t) = \begin{pmatrix} v(t) + \frac{a(t) \cdot \Delta t}{2} \\ \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \end{pmatrix}$$



Schwerpunktimpuls-Erhaltung:  $\mathbf{P} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \text{const.}$

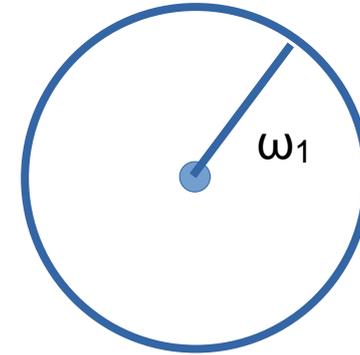
## Zwangskräfte allgemein:

# Analogie zu partiellen Ableitungen: Lokale zeitliche Expansionen mit „natürlichen“ Zwangskräften, lokale Symmetrienerhaltung

## Natürliche Zwangskräfte Typ 1:

Längsbeschleunigung aus:  $v = \text{const.}$ , nur ein „Omega“ an: Nur noch Kreisbahnen, Drehimpulserhaltung

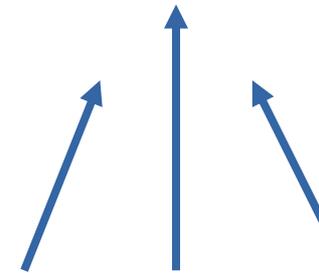
$$\vec{V}(t(= n \cdot \Delta t), \Delta t) = \begin{pmatrix} v(t) + \frac{a(t) \cdot \Delta t}{2} \\ \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \end{pmatrix}$$



## Natürliche Zwangskraft Typ 2:

Querbeschleunigungen aus:  $\omega_1 = \omega_2 = 0$ . Zwangskraft an, die alle Bahnen auf Geraden zwingt, (Schwerpunkt)Impulserhaltung.

$$\vec{V}(t(= n \cdot \Delta t), \Delta t) = \begin{pmatrix} v(t) + \frac{a(t) \cdot \Delta t}{2} \\ \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \end{pmatrix}$$



Schwerpunktimpuls-Erhaltung:  $\mathbf{P} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \text{const.}$

## Zwangskräfte allgemein:

Lokale Eliminierung der Komponenten der „Pseudogradienten“ von  $g(x,y,z) = 0$ .

# Relativität, Zeitdilatation und Längenkontraktion (Arbeitshypothesen)

**Lorentztransformation:**

$$t' = \gamma \left( t - \frac{v_x}{c^2} x \right)$$

$$x' = \gamma(x - v_x t)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$v'_x = -v_x$$

**Lorentzfaktor**

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

**Wie**

**Kinetikexperimente:**

**„Startschuss“**

**(Laser)**

**und Ort**

# Relativität, Zeitdilatation und Längenkontraktion (Arbeitshypothesen)

**Lorentztransformation:**

$$t' = \gamma \left( t - \frac{v_x}{c^2} x \right)$$

$$x' = \gamma(x - v_x t)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$v'_x = -v_x$$

**Lorentzfaktor**

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

**Wie**

**Kinetikexperimente:**

**„Startschuss“**

**(Laser)**

**und Ort**

$$\vec{V}(t(= n \cdot \Delta t), \Delta t) = \begin{pmatrix} v(t) + \frac{a(t) \cdot \Delta t}{2} \\ \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \end{pmatrix}$$

# Relativität, Zeitdilatation und Längenkontraktion (Arbeitshypothesen)

**Lorentztransformation:**

$$t' = \gamma \left( t - \frac{v_x}{c^2} x \right)$$

$$x' = \gamma(x - v_x t)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$v'_x = -v_x$$

**Lorentzfaktor**

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

**Wie**

**Kinetikexperimente:**

**„Startschuss“**

**(Laser)**

**und Ort**

$$\vec{V}(t(= n \cdot \Delta t)), \Delta t = \begin{pmatrix} v(t) + \frac{a(t) \cdot \Delta t}{2} \\ \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{V}(t'(= n \cdot \Delta t')), \Delta t' = \begin{pmatrix} v(t') + \frac{a(t') \cdot \Delta t'}{2} \\ \omega_1(t') \\ \omega_2(t') \end{pmatrix}$$

# Relativität, Zeitdilatation und Längenkontraktion (Arbeitshypothesen)

Lorentztransformation:

$$t' = \gamma \left( t - \frac{v_x}{c^2} x \right)$$

$$x' = \gamma(x - v_x t)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$v'_x = -v_x$$

Lorentzfaktor

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Wie  
Kinetikexperimente:  
„Startschuss“  
(Laser)  
und Ort

$$\vec{V}(t(= n \cdot \Delta t)), \Delta t = \begin{pmatrix} v(t) + \frac{a(t) \cdot \Delta t}{2} \\ \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \end{pmatrix}$$

Längenkontraktion,  
Wegschrittstauchung

$$L' = T'_0 v = \frac{T}{\gamma} v$$

$$\vec{V}(t'(= n \cdot \Delta t')), \Delta t' = \begin{pmatrix} v(t') + \frac{a(t') \cdot \Delta t'}{2} \\ \omega_1(t') \\ \omega_2(t') \end{pmatrix}$$

# Relativität, Zeitdilatation und Längenkontraktion (Arbeitshypothesen)

Lorentztransformation:

$$t' = \gamma \left( t - \frac{v_x}{c^2} x \right)$$

$$x' = \gamma(x - v_x t)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$v'_x = -v_x$$

Lorentzfaktor

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Wie  
Kinetikexperimente:  
„Startschuss“  
(Laser)  
und Ort

$$\vec{V}(t(= n \cdot \Delta t)), \Delta t = \begin{pmatrix} v(t) + \frac{a(t) \cdot \Delta t}{2} \\ \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \end{pmatrix}$$

Längenkontraktion,  
Wegschrittstauchung

$$L' = T'_0 v = \frac{T}{\gamma} v$$

$$\vec{V}(t'(= n \cdot \Delta t')), \Delta t' = \begin{pmatrix} v(t') + \frac{a(t') \cdot \Delta t'}{2} \\ \omega_1(t') \\ \omega_2(t') \end{pmatrix}$$

Zeitdilatation,  
Zeitschrittstreckung

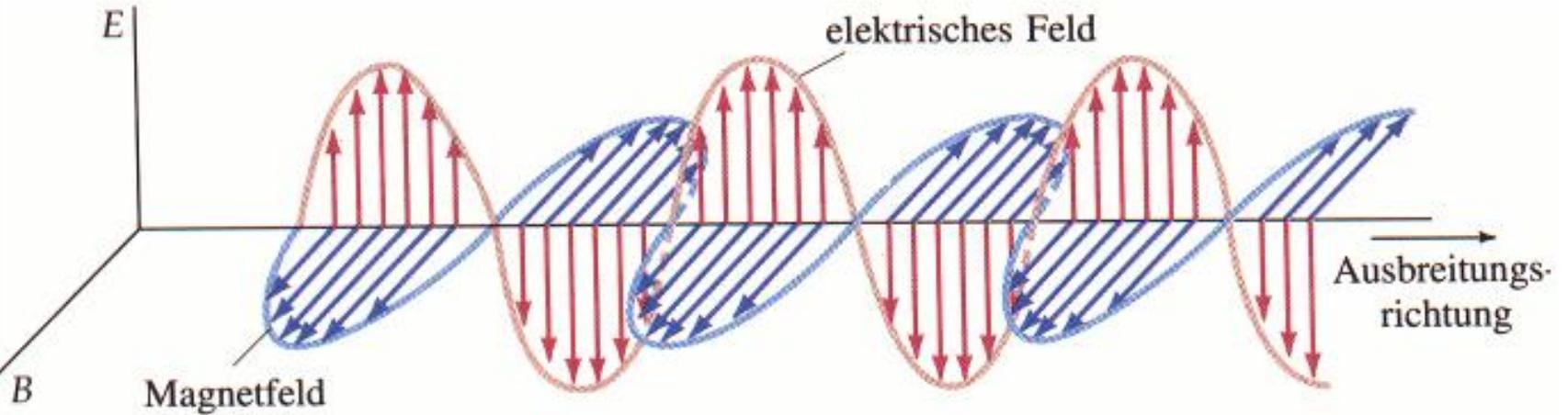
$$T'_0 = T / \gamma,$$

# Relativität, Zeitdilatation und Längenkontraktion (Arbeitshypothesen)

Lorentztra

Wie  
Kinetikex  
„Startsch  
(Laser)  
und Ort

## Elektromagnetisches Feld:



[http://web.physik.rwth-aachen.de/~hebbeker/lectures/ph2\\_02/tipl293.gif](http://web.physik.rwth-aachen.de/~hebbeker/lectures/ph2_02/tipl293.gif)

$$\vec{V}(t(= n \cdot \Delta t), \Delta t) = \begin{pmatrix} v(t) \\ \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \end{pmatrix}$$

**Längenkontraktion,  
Wegschrittstauchung**

$$L' = T'_0 v = \frac{T}{\gamma} v$$

$$\vec{V}(t'(= n \cdot \Delta t'), \Delta t') = \begin{pmatrix} v(t') + \frac{a(t') \cdot \Delta t'}{2} \\ \omega_1(t') \\ \omega_2(t') \end{pmatrix}$$

**Zeitdilatation,  
Zeitschrittstreckung**

$$T'_0 = T / \gamma,$$

# „Numerische“ und gravitative und Zeitdilatation (Arbeitshypothesen)

## **Zeitdilatation numerisch:**

Laufzeitänderung für konstant gehaltene Wegstrecke bei Übergang von  $\Delta t_n$  zu  $\Delta t_{n+1} = \text{z.B. } \Delta t_n/2$ . Geht gegen 0, analog Wegstreckenstauchung/-Steckung bei konstanter Laufzeit. Kartesischer Raum ist entkoppelt von Zeitschritt  $\Delta t$ !

# „Numerische“ und gravitative und Zeitdilatation (Arbeitshypothesen)

## **Zeitdilatation numerisch:**

Laufzeitänderung für konstant gehaltene Wegstrecke bei Übergang von  $\Delta t_n$  zu  $\Delta t_{n+1} = \text{z.B. } \Delta t_n/2$ . Geht gegen 0, analog Wegstreckenstauchung/-Steckung bei konstanter Laufzeit. Kartesischer Raum ist entkoppelt von Zeitschritt  $\Delta t$ !

## **Zeitdilatation gravitativ:**

Zeitdilatation ist Funktion der lokalen Gravitationskraft:

# „Numerische“ und gravitative und Zeitdilatation (Arbeitshypothesen)

## Zeitdilatation numerisch:

Laufzeitänderung für konstant gehaltene Wegstrecke bei Übergang von  $\Delta t_n$  zu  $\Delta t_{n+1} = \text{z.B. } \Delta t_n/2$ . Geht gegen 0, analog Wegstreckenstauchung/-Steckung bei konstanter Laufzeit. Kartesischer Raum ist entkoppelt von Zeitschritt  $\Delta t$ !

## Zeitdilatation gravitativ:

Zeitdilatation ist Funktion der lokalen Gravitationskraft:

## Zeitdilatation

**Stationär:** Schwarzschildmetrik bestimmt Zeitdilatation

$$\frac{dt}{d\tau} = \sqrt{g^{tt}}$$

# „Numerische“ und gravitative und Zeitdilatation (Arbeitshypothesen)

## Zeitdilatation numerisch:

Laufzeitänderung für konstant gehaltene Wegstrecke bei Übergang von  $\Delta t_n$  zu  $\Delta t_{n+1} = \text{z.B. } \Delta t_n/2$ . Geht gegen 0, analog Wegstreckenstauchung/-Steckung bei konstanter Laufzeit. Kartesischer Raum ist entkoppelt von Zeitschritt  $\Delta t$ !

## Zeitdilatation gravitativ:

Zeitdilatation ist Funktion der lokalen Gravitationskraft:

## Zeitdilatation

**Stationär:** Schwarzschildmetrik bestimmt Zeitdilatation

$$\frac{dt}{d\tau} = \sqrt{g^{tt}}$$

**Bahn:** Zeitdilatation wird Funktion der Richtung, Raumzeitkrümmung zieht Bahn in Richtung der maximalen Zeitdilatation, lokale Metrik, Bahn maximiert akkumulierte Zeitdilatation. Raum-Zeitschritt nicht mehr entkoppelt, G krümmt Raumzeit. Riesige Massen, relativistische Geschwindigkeiten, Rotationen: x-t-Kopplung wie E-Feld-B-Feld : Gravitationswellen, Ausbreitungsgeschwindigkeit c.

# Maxwellsche Feldgleichungen der Elektrodynamik (1864), lokal

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

1: Ladungen sind Quellen von E-Feldlinien

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

2: Es gibt keine magnetischen Ladungen, nur Orientierungen geschlossener Feldlinien

$$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

3: Die lokale „elektrische Zirkulation“ ist proportional zur Änderungsrate des B-Felds

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

4: Die lokale „magnetische Zirkulation“ ist proportional zu Stromfluss + und Änderungsrate von E-Fluss. Entkopplung von Materie und Feld!

# Maxwellsche Feldgleichungen der Elektrodynamik (1864), lokal

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho \\
 \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\
 \operatorname{rot} \vec{E} &= - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}
 \end{aligned}
 \left( \begin{array}{c}
 v(t) + \frac{a(t) \cdot \Delta t}{2} \\
 \omega_1(t) + \frac{d}{dt} \omega_1 \frac{\Delta t}{2} \\
 \omega_2(t) + \frac{d}{dt} \omega_2 \frac{\Delta t}{2}
 \end{array} \right)$$

proportional zur Änderungsrate des B-Felds

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

4: Die lokale „magnetische Zirkulation“ ist proportional zu Stromfluss + und Änderungsrate von E-Fluss. Entkopplung von Materie und Feld!

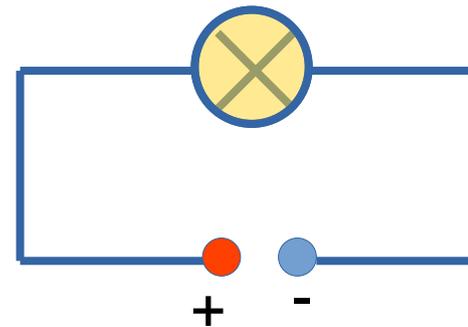
# Maxwellsche Feldgleichungen der Elektrodynamik (1864), lokal

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$



3: Die lokale „elektrische Zirkulation“ ist proportional zur Änderungsrate des B-Felds

4: Die lokale „magnetische Zirkulation“ ist proportional zu Stromfluss + und Änderungsrate von E-Fluss. Entkopplung von Materie und Feld!

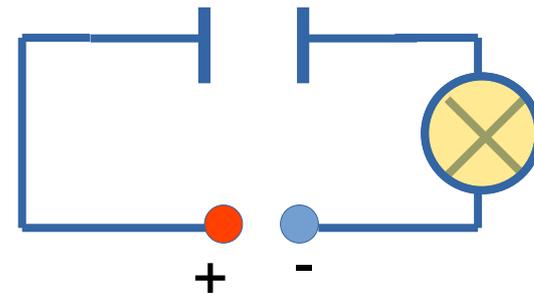
# Maxwellsche Feldgleichungen der Elektrodynamik (1864), lokal

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$



3: Die lokale „elektrische Zirkulation“ ist proportional zur Änderungsrate des B-Felds

4: Die lokale „magnetische Zirkulation“ ist proportional zu Stromfluss + und Änderungsrate von E-Fluss. Entkopplung von Materie und Feld!

# Zeit in Chemischer Kinetik, statistischer Mechanik und Quantenmechanik

**Probleme:**

# Zeit in Chemischer Kinetik, statistischer Mechanik und Quantenmechanik

**Probleme:**

**Energieabgabe in chemischer Reaktion: Eigentlich  $dE/dt = 0$**

**Endliche Anzahl Moleküle, Quantenzustände!**

# Zeit in Chemischer Kinetik, statistischer Mechanik und Quantenmechanik

## **Probleme:**

**Energieabgabe in chemischer Reaktion: Eigentlich  $dE/dt = 0$**

**Endliche Anzahl Moleküle, Quantenzustände!**

**Räuber-Beute-Modell, Prof. Patterson: „Die Füchsen beißen etwas von die Hasen ab, dann stetig“ ... Berücksichtigung der Fresszeit löst das Problem!!**

# Zeit in Chemischer Kinetik, statistischer Mechanik und Quantenmechanik

## **Probleme:**

**Energieabgabe in chemischer Reaktion: Eigentlich  $dE/dt = 0$**

**Endliche Anzahl Moleküle, Quantenzustände!**

**Räuber-Beute-Modell, Prof. Patterson: „Die Füchsen beißen etwas von die Hasen ab, dann stetig“ ... Berücksichtigung der Fresszeit löst das Problem!!**

**Molekulare (auch radioaktive) Zerfälle: Reaktionszeit nicht vorhersagbar, statistisch**

# Zeit in Chemischer Kinetik, statistischer Mechanik und Quantenmechanik

## **Probleme:**

**Energieabgabe in chemischer Reaktion: Eigentlich  $dE/dt = 0$**

**Endliche Anzahl Moleküle, Quantenzustände!**

**Räuber-Beute-Modell, Prof. Patterson: „Die Füchsen beißen etwas von die Hasen ab, dann stetig“ ... Berücksichtigung der Fresszeit löst das Problem!!**

**Molekulare (auch radioaktive) Zerfälle: Reaktionszeit nicht vorhersagbar, statistisch**

**Zeit / Raum tauschen Rollen bei mikroskopischem Phasenübergang (Wasser)**

# Zeit in Chemischer Kinetik, statistischer Mechanik und Quantenmechanik

## **Probleme:**

**Energieabgabe in chemischer Reaktion: Eigentlich  $dE/dt = 0$**

**Endliche Anzahl Moleküle, Quantenzustände!**

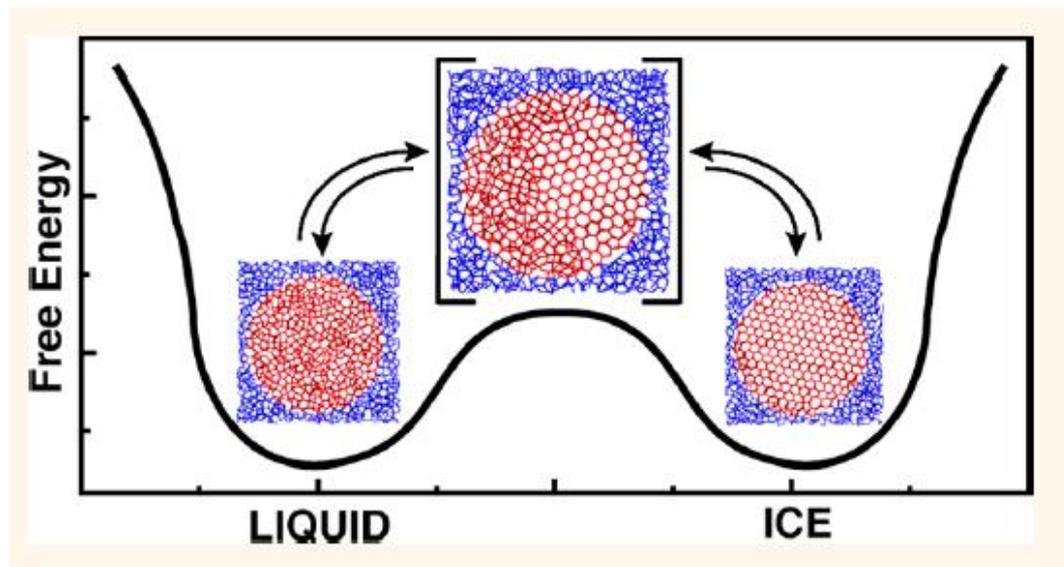
**Räuber-Beute-Modell, Prof. Patterson: „Die Füchsen beißen etwas von die Hasen ab, dann stetig“ ... Berücksichtigung der Fresszeit löst das Problem!!**

**Molekulare (auch radioaktive) Zerfälle: Reaktionszeit nicht vorhersagbar, statistisch**

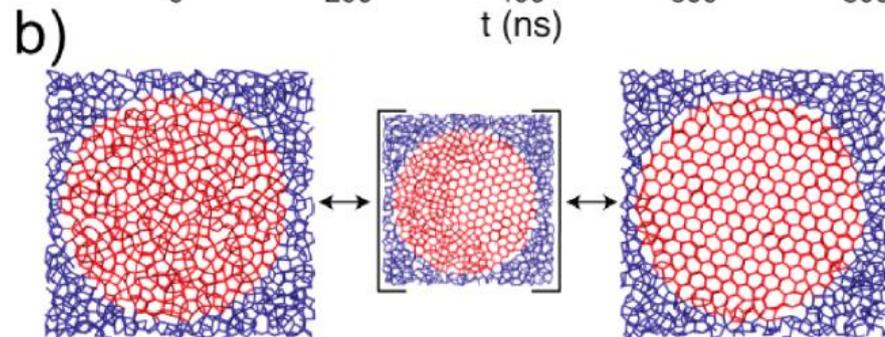
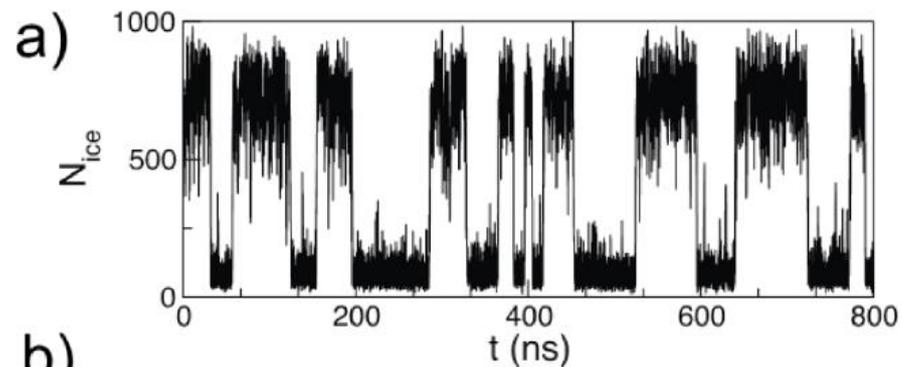
**Zeit / Raum tauschen Rollen bei mikroskopischem Phasenübergang (Wasser)**

**Zeit wird in nicht relativistischer Quantenmechanik als klassische Uhr betrachtet, es gibt keinen Erwartungswert für die Zeit als Observable, Zeit definiert im Protokoll Messzeitpunkte, wird aber selbst nicht quantenmechanisch gemessen (Fließbach, QM, S. 52).**

# Phasengleichgewicht, Wasser-Eis, Mikro / Makro



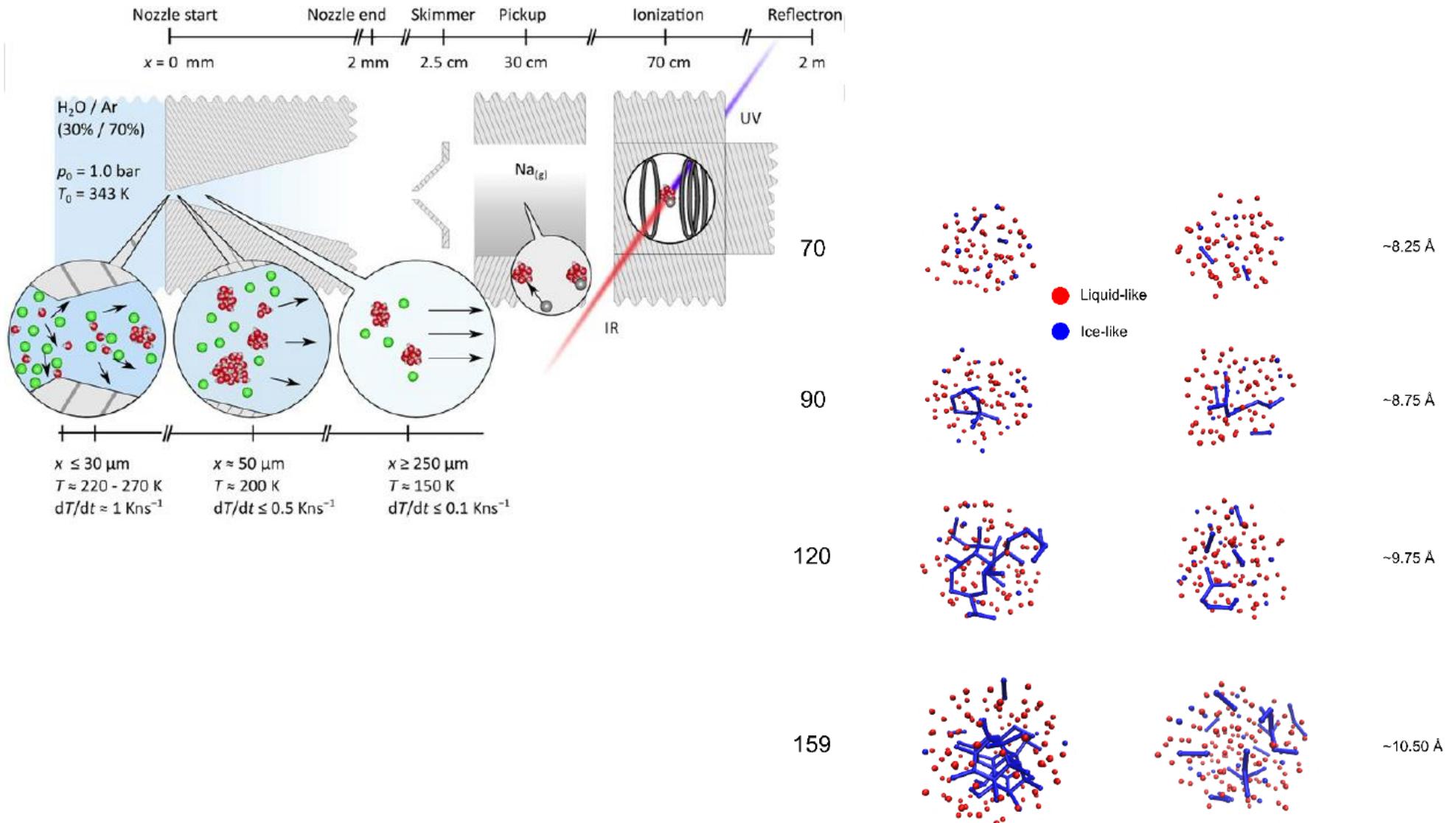
**Valeria Molinero**  
University of Utah  
Henry Eyring Center for Theoretical  
Chemistry



DOI: [10.1021/acsnano.8b03403](https://doi.org/10.1021/acsnano.8b03403)  
ACS Nano 2018, 12, 8234–8239

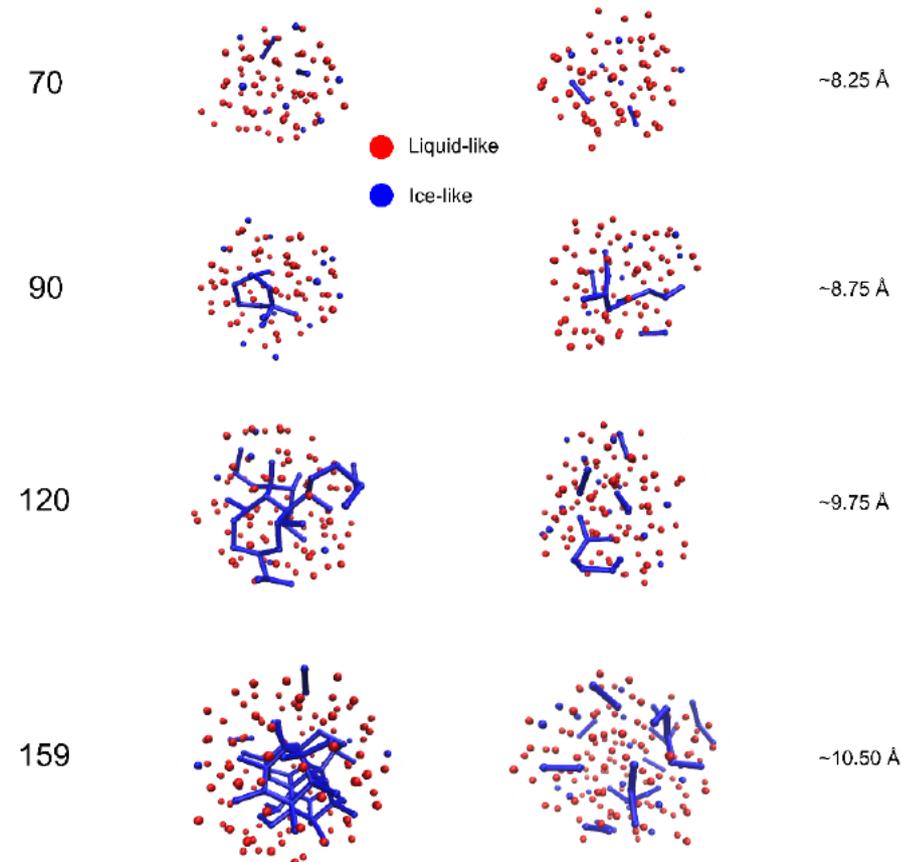
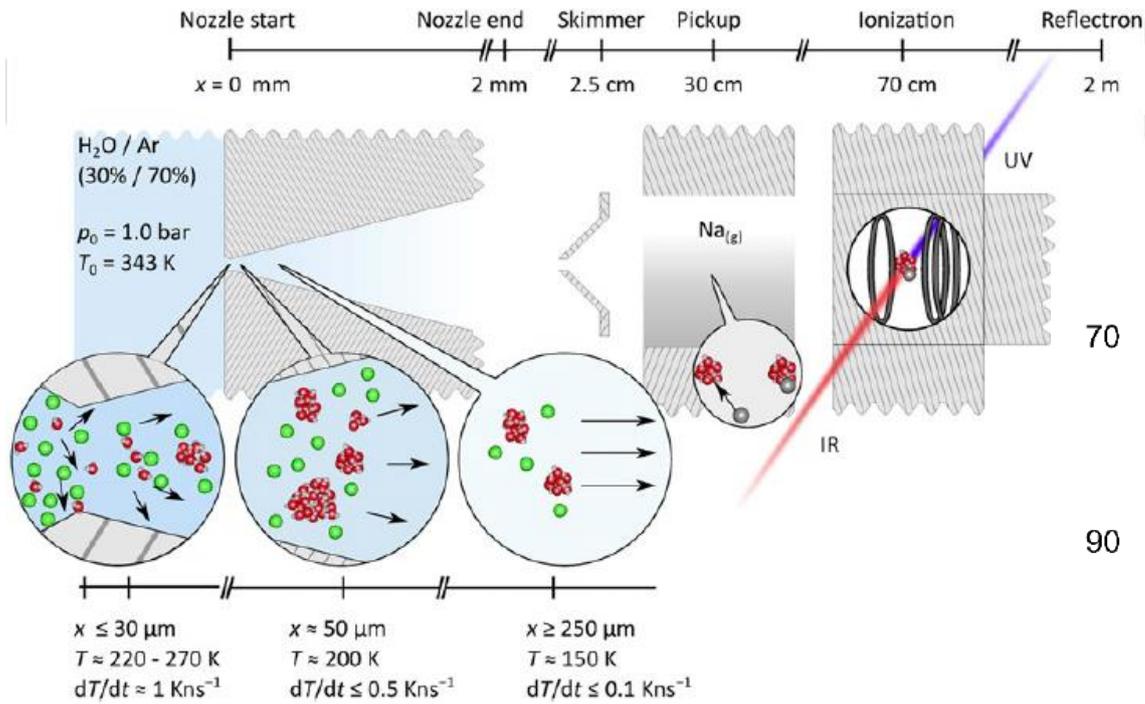
# Phasengleichgewicht, Wasser-Eis, Mikro / Makro

## The End of Ice I



# Phasengleichgewicht, Wasser-Eis, Mikro / Makro

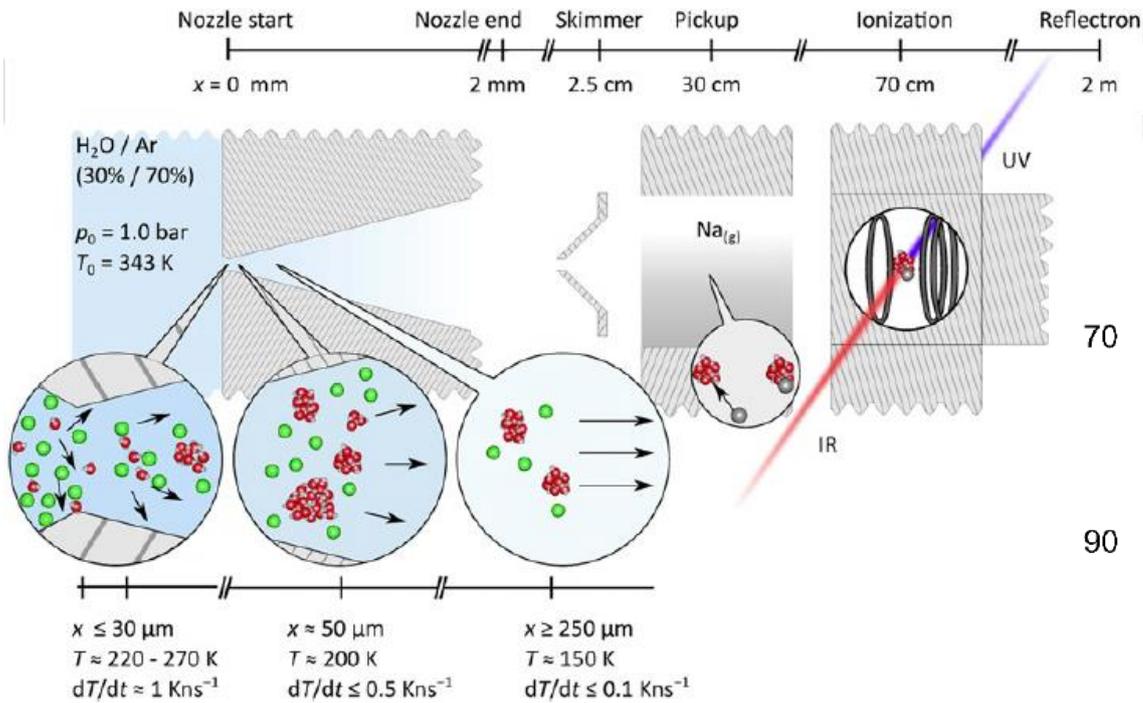
## The End of Ice I



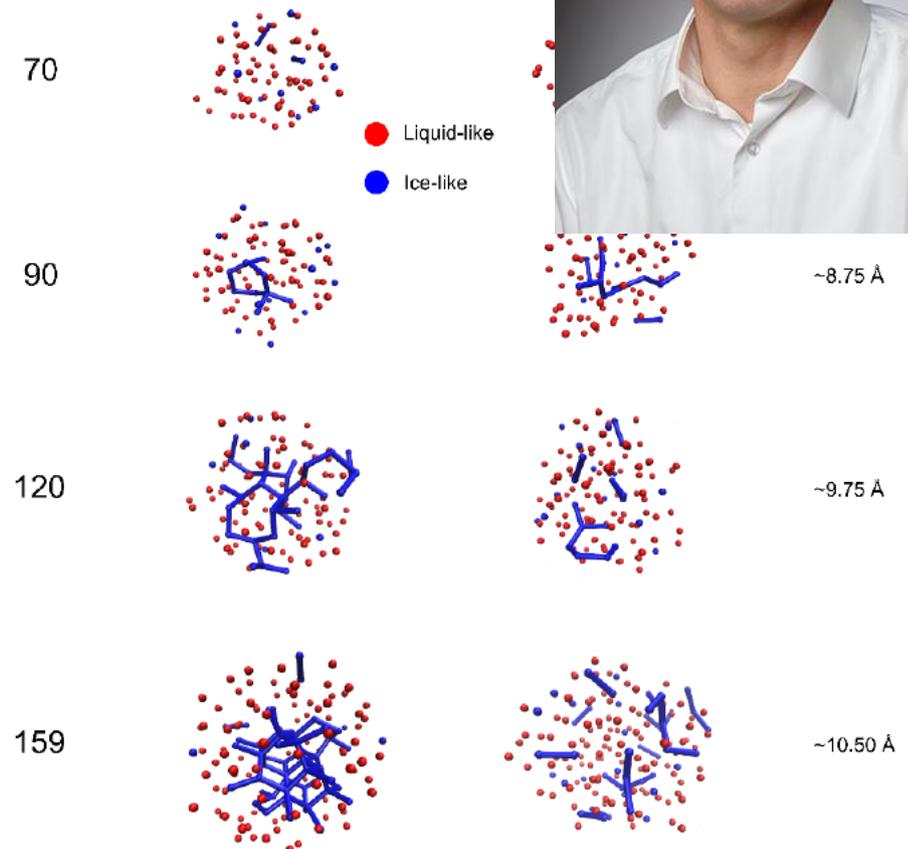
**Francesco Paesani**  
 University of California, San Diego  
 Department of Chemistry and Biochemistry

# Phasengleichgewicht, Wasser-Eis, Mikro / Makro

## The End of Ice I



Bernhard Bandow  
AG „eScience“  
GWDG



**Francesco Paesani**  
University of California, San Diego  
Department of Chemistry and Biochemistry

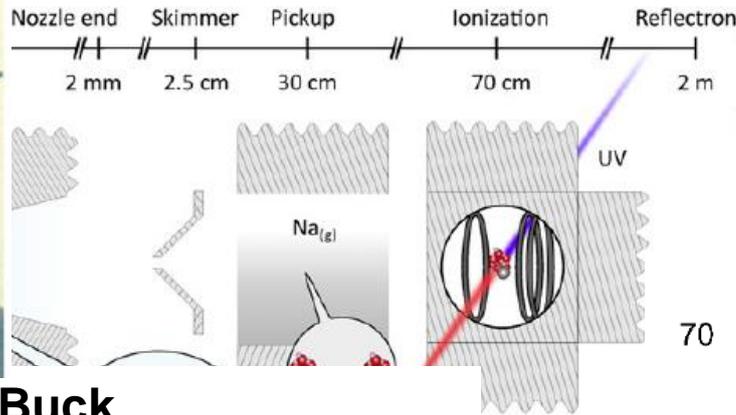
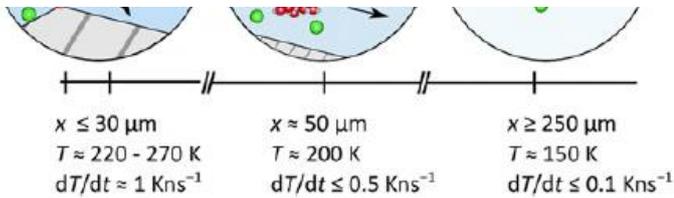
# Phasegleichgewicht, Wasser-Eis, Mikro / Makro

## The End of Ice I

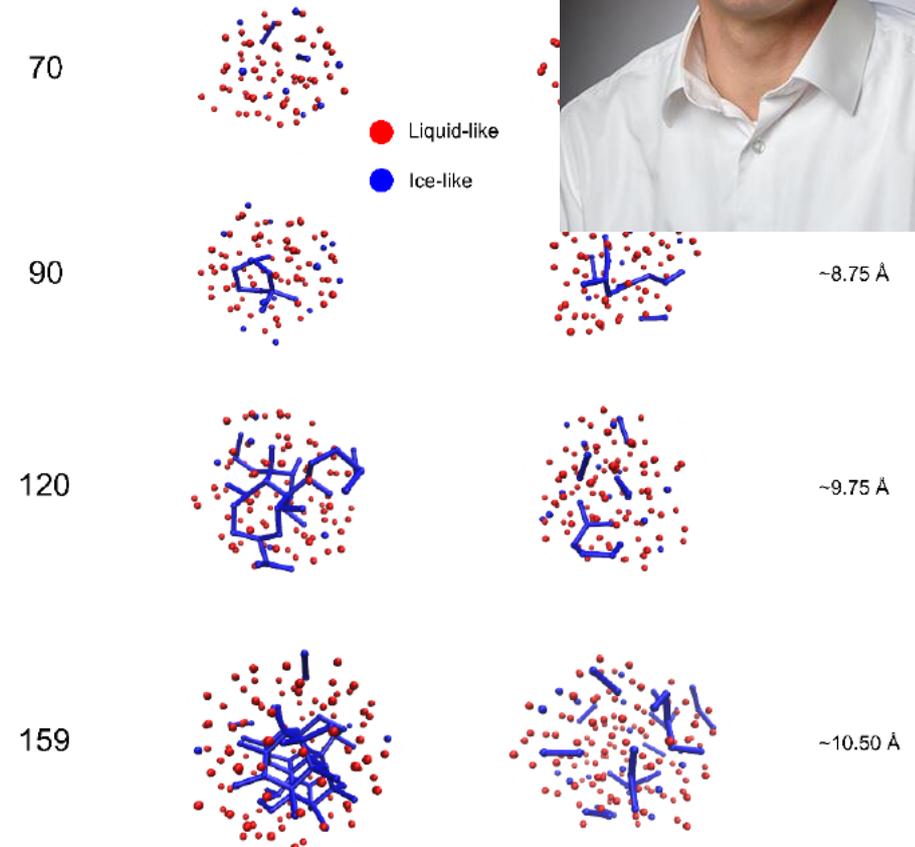


**Udo Buck**

MPI Dynamik und Selbstorganisation



**Bernhard Bandow**  
AG „eScience“  
GWDG



**Francesco Paesani**

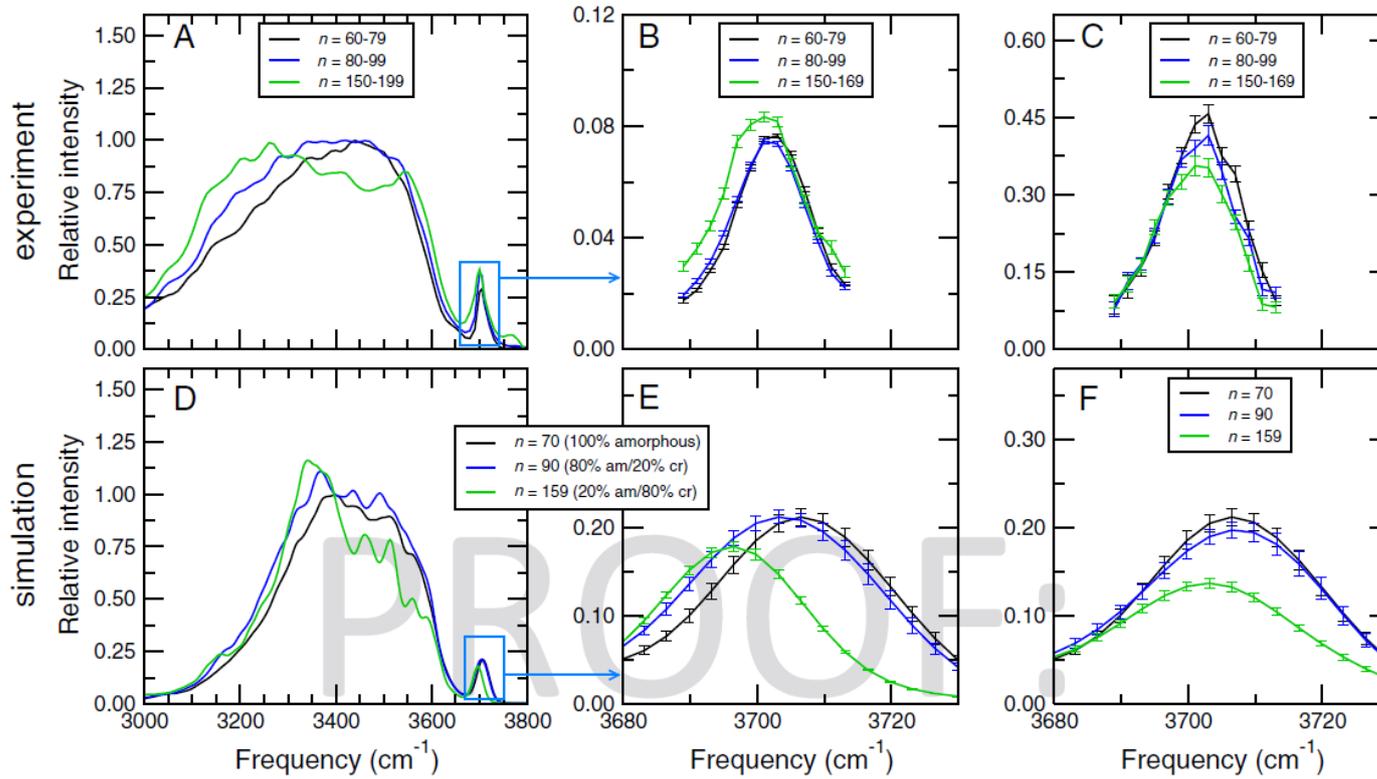
University of California, San Diego  
Department of Chemistry and Biochemistry

# Phasengleichgewicht, Wasser-Eis, Mikro / Makro

## The End of Ice I

Slow Cooling

Fast Cooling

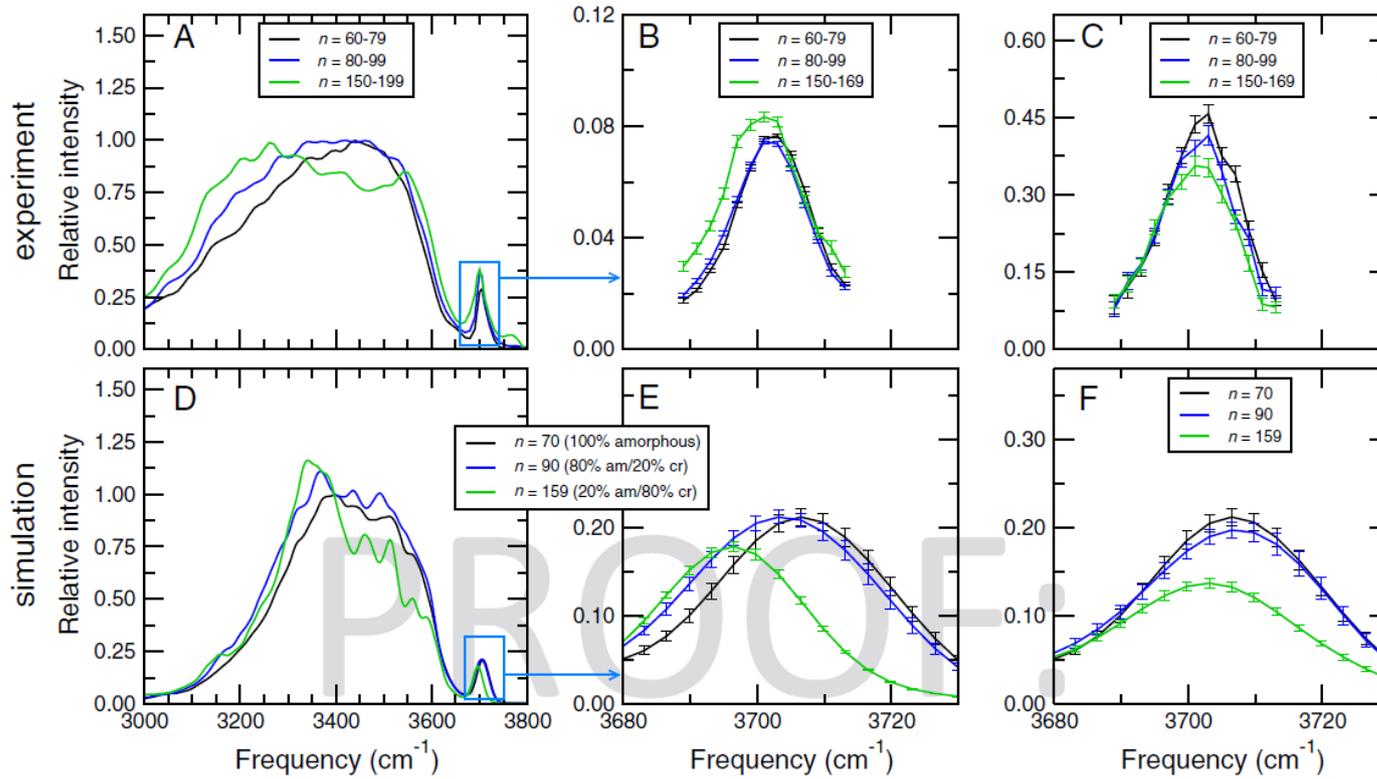


# Phasengleichgewicht, Wasser-Eis, Mikro / Makro

## The End of Ice I

Slow Cooling

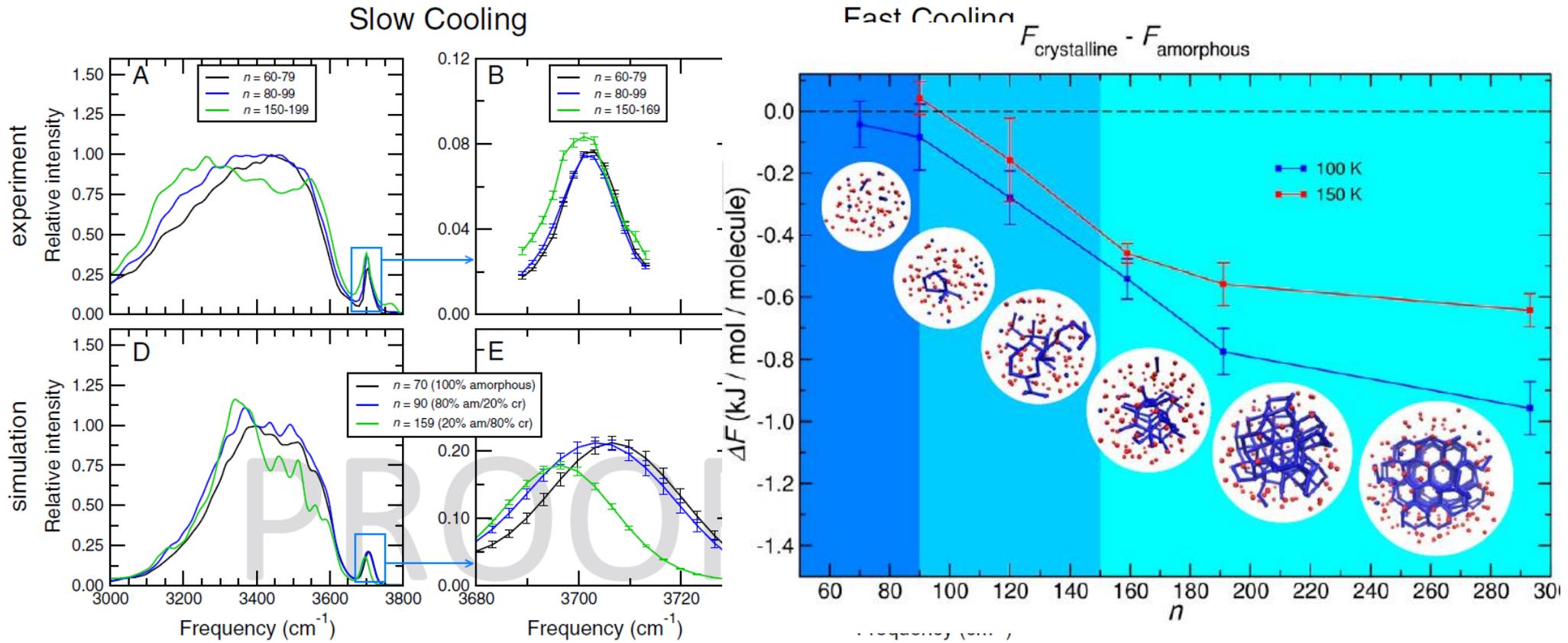
Fast Cooling



$$I_{IR}(\omega) = \left[ \frac{2\omega}{3V\hbar c\epsilon_0} \right] \tanh(\beta\hbar\omega) \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} \langle \mu(0)\mu(t) \rangle$$

# Phasengleichgewicht, Wasser-Eis, Mikro / Makro

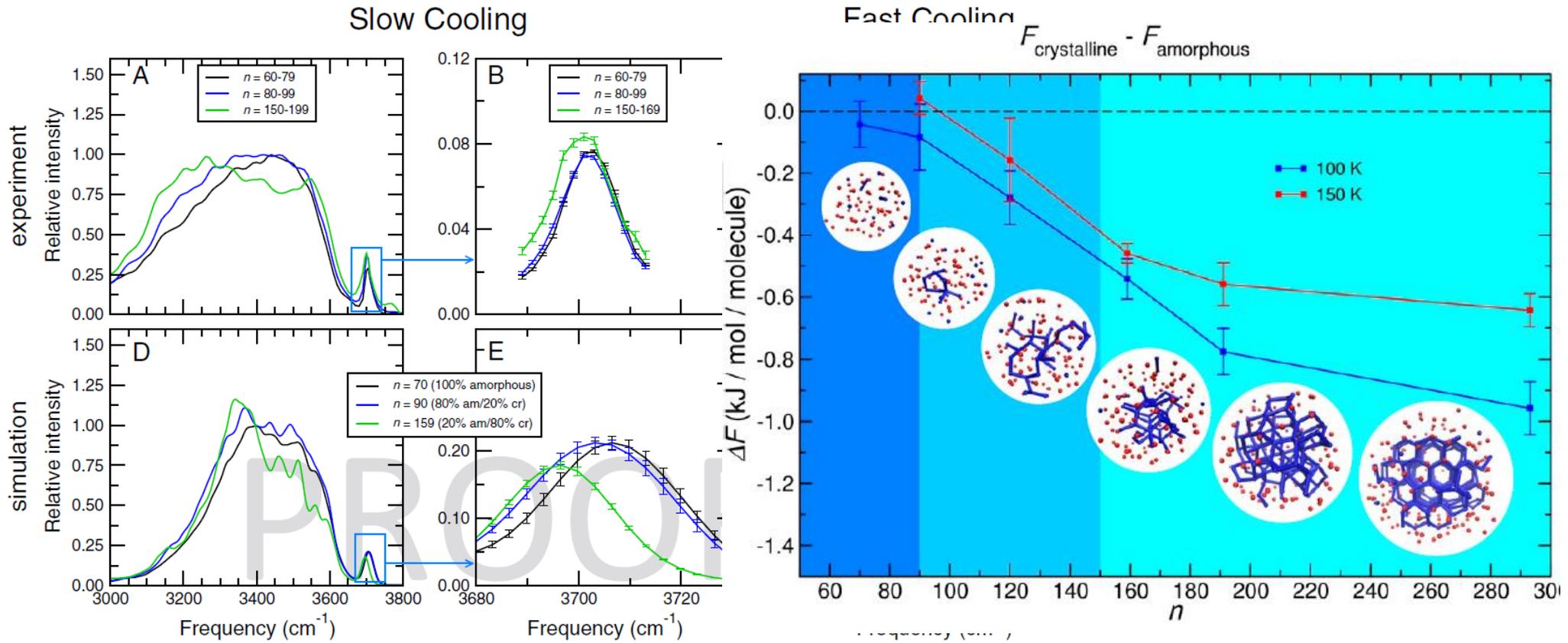
## The End of Ice I



$$I_{IR}(\omega) = \left[ \frac{2\omega}{3V\hbar c\epsilon_0} \right] \tanh(\beta\hbar\omega) \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} \langle \mu(0)\mu(t) \rangle$$

# Phasengleichgewicht, Wasser-Eis, Mikro / Makro

## The End of Ice I

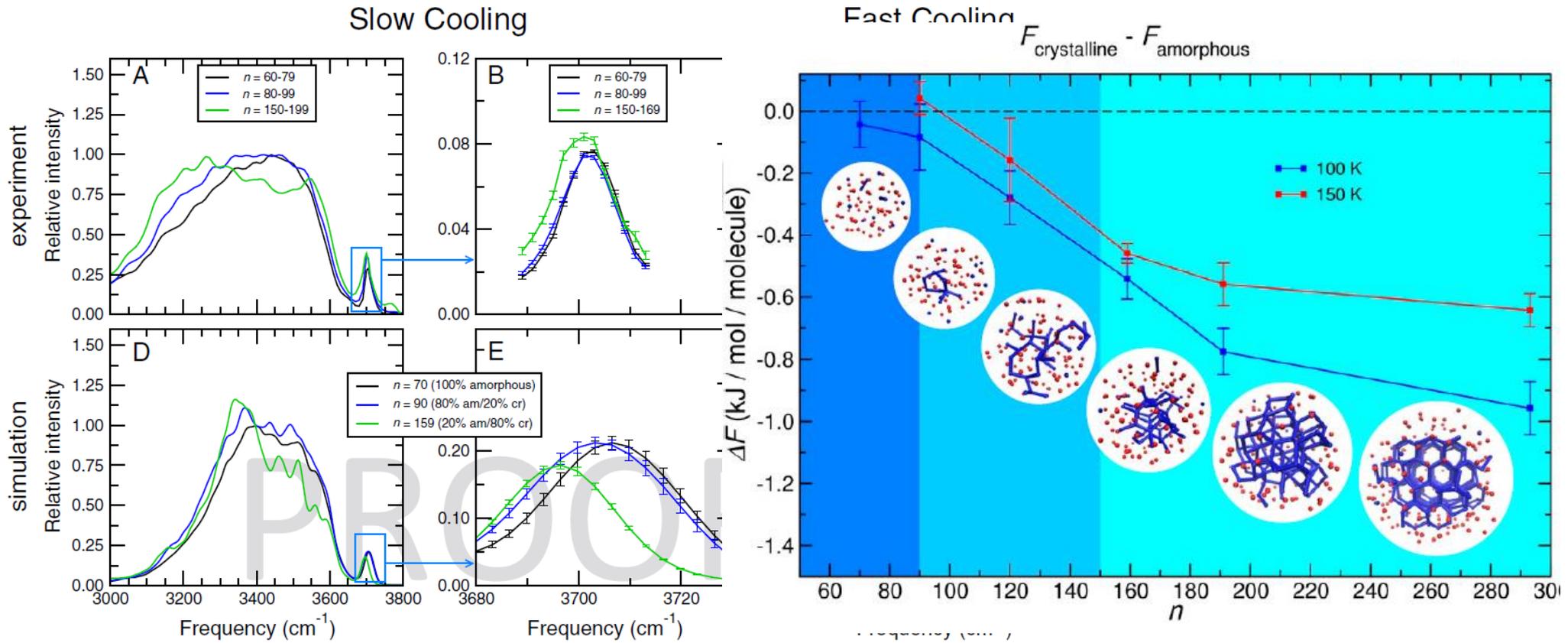


$$I_{IR}(\omega) = \left[ \frac{2\omega}{3V\hbar c\epsilon_0} \right] \tanh(\beta\hbar\omega) \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} \langle \mu(0)\mu(t) \rangle$$

$$F = U_{conf} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n h\nu_i + k_B T \sum_{i=1}^n \ln \left( 1 - e^{-\frac{h\nu_i}{k_B T}} \right)$$

# Phasengleichgewicht, Wasser-Eis, Mikro / Makro

## The End of Ice I

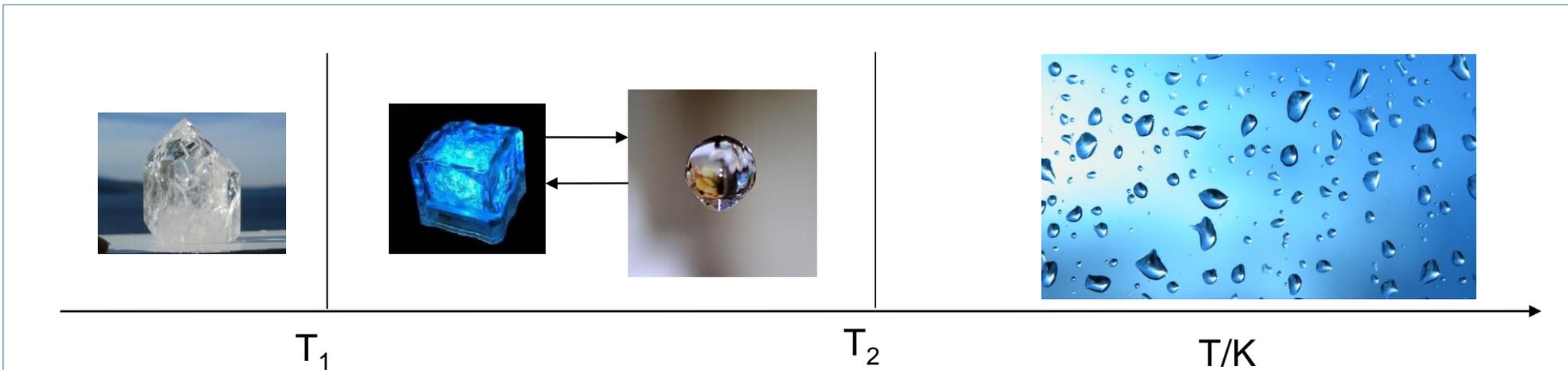
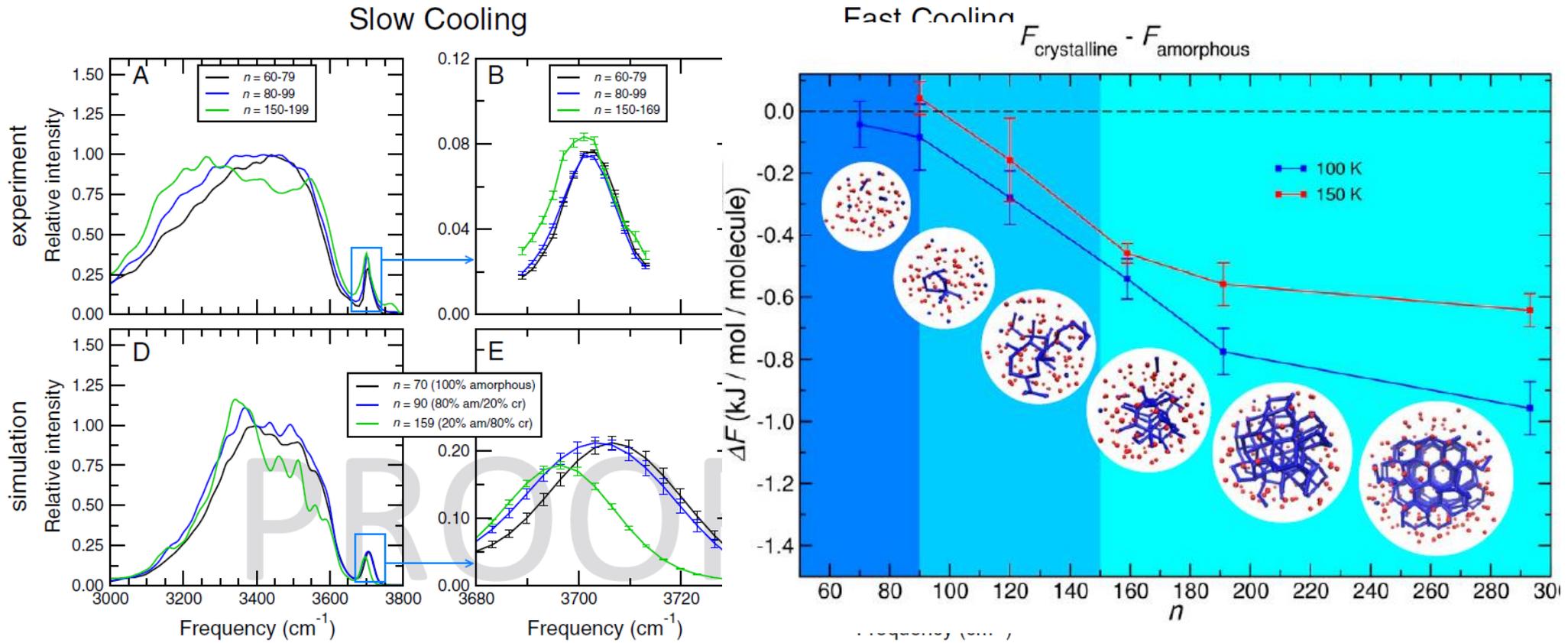


$$I_{IR}(\omega) = \left[ \frac{2\omega}{3V\hbar c\epsilon_0} \right] \tanh(\beta\hbar\omega) \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} \langle \mu(0)\mu(t) \rangle$$

$$F = U_{conf} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \hbar v_i + k_B T \sum_{i=1}^n \ln \left( 1 - e^{-\frac{\hbar v_i}{k_B T}} \right)$$

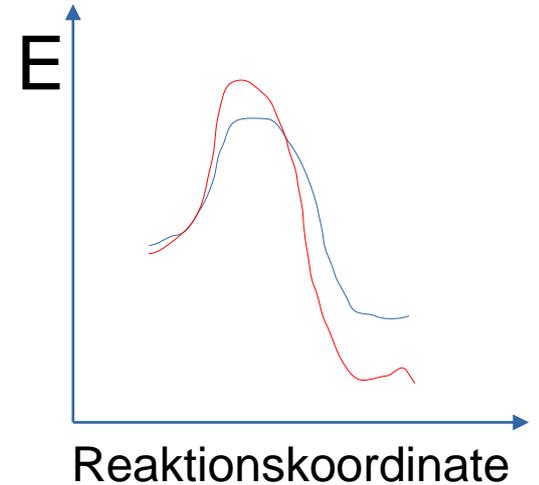
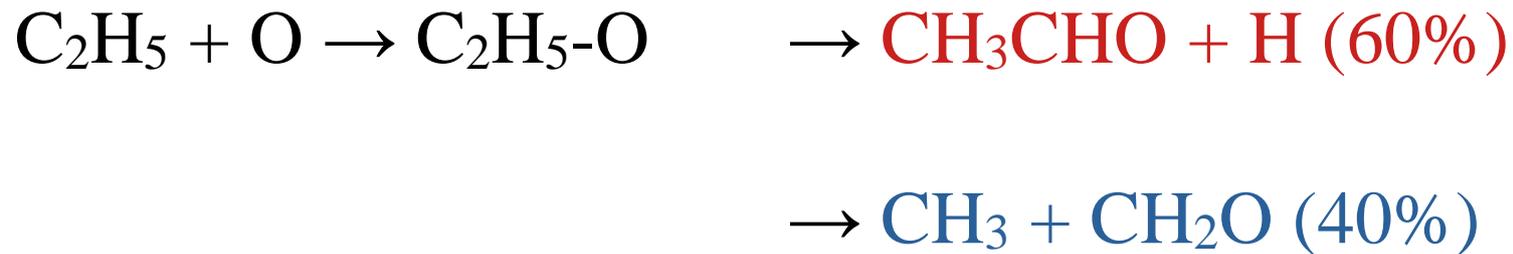
# Phasengleichgewicht, Wasser-Eis, Mikro / Makro

## The End of Ice I



# Widersprüche?

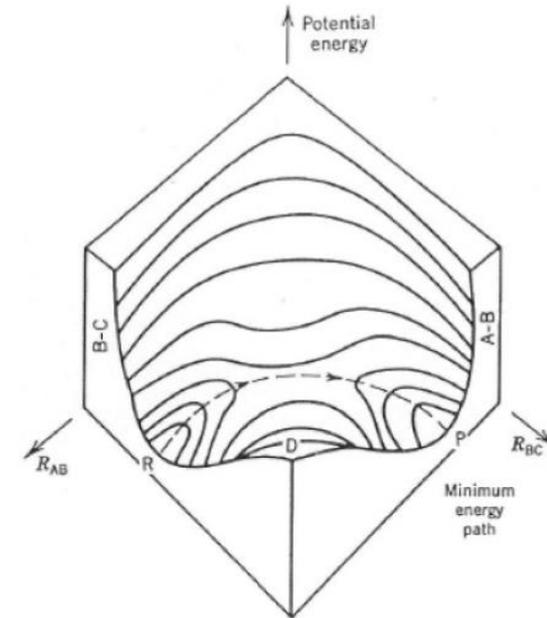
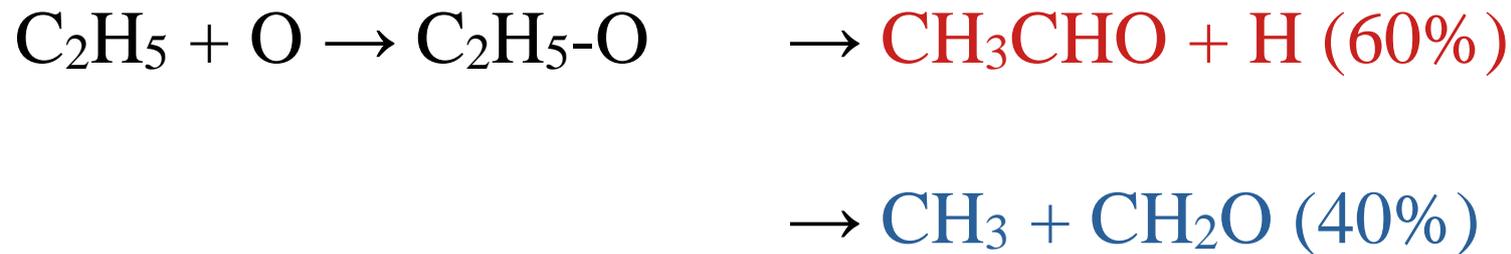
Beispiel aus Doktorarbeit:



Reaktionszeit? Klassisch? Totalversagen jeder Rechnung. Nur statistisch, QM, Schrödinger-Gleichung lösen: Nach ca. 1 ps ( $10^{-12}\text{s}$ ) mit 50% Wahrscheinlichkeit zerfallen, Produktverteilung: Bestimmt durch Höhe der Energiebarriere + Zustandsdichte der Kanäle. Für Ensemble exponentieller Abfall des Ausgangsstoffs.

# Widersprüche?

Beispiel aus Doktorarbeit:



Reaktionszeit? Klassisch? Totalversagen jeder Rechnung. Nur statistisch, QM, Schrödinger-Gleichung lösen: Nach ca. 1 ps ( $10^{-12}\text{s}$ ) mit 50% Wahrscheinlichkeit zerfallen, Produktverteilung: Bestimmt durch Höhe der Energiebarriere + Zustandsdichte der Kanäle. Für Ensemble exponentieller Abfall des Ausgangsstoffs.

**Was verändert sich makroskopisch-mikroskopisch?**

# Was verändert sich makroskopisch-mikroskopisch?

Phasen fest (Eis) und flüssig **räumlich getrennt**, Raum inhomogen, Zeit spielt keine Rolle. Mikroskopisch: Oszillierende Tröpfchen im Raum homogen verteilt, Zustände sind **zeitlich getrennt**. Nur Erwartungswerte für Verweilzeiten im jeweiligen Phasenzustand

# Was verändert sich makroskopisch-mikroskopisch?

Phasen fest (Eis) und flüssig **räumlich getrennt**, Raum inhomogen, Zeit spielt keine Rolle. Mikroskopisch: Oszillierende Tröpfchen im Raum homogen verteilt, Zustände sind **zeitlich getrennt**. Nur Erwartungswerte für Verweilzeiten im jeweiligen Phasenzustand

Molekulare Reaktionszeiten sind nicht klassisch (Stoßtheorie) vorhersagbar

# Was verändert sich makroskopisch-mikroskopisch?

Phasen fest (Eis) und flüssig **räumlich getrennt**, Raum inhomogen, Zeit spielt keine Rolle. Mikroskopisch: Oszillierende Tröpfchen im Raum homogen verteilt, Zustände sind **zeitlich getrennt**. Nur Erwartungswerte für Verweilzeiten im jeweiligen Phasenzustand

Molekulare Reaktionszeiten sind nicht klassisch (Stoßtheorie) vorhersagbar

**Gibt es in der Physik mikroskopische Analoga zu den kontinuierlichen Symmetrien von Emmy Noether? Wie sind Impuls- und Energieerhaltung mikroskopisch realisiert?**

# Was verändert sich makroskopisch-mikroskopisch?

Phasen fest (Eis) und flüssig **räumlich getrennt**, Raum inhomogen, Zeit spielt keine Rolle. Mikroskopisch: Oszillierende Tröpfchen im Raum homogen verteilt, Zustände sind **zeitlich getrennt**. Nur Erwartungswerte für Verweilzeiten im jeweiligen Phasenzustand

Molekulare Reaktionszeiten sind nicht klassisch (Stoßtheorie) vorhersagbar

**Gibt es in der Physik mikroskopische Analoga zu den kontinuierlichen Symmetrien von Emmy Noether? Wie sind Impuls- und Energieerhaltung mikroskopisch realisiert?**

**Für Ort/Raum und Impuls, ja, klar: Heisenbergs berühmte Unschärferelation, gilt für Standardmodell!**

# Was verändert sich makroskopisch-mikroskopisch?

Phasen fest (Eis) und flüssig **räumlich getrennt**, Raum inhomogen, Zeit spielt keine Rolle. Mikroskopisch: Oszillierende Tröpfchen im Raum homogen verteilt, Zustände sind **zeitlich getrennt**. Nur Erwartungswerte für Verweilzeiten im jeweiligen Phasenzustand

Molekulare Reaktionszeiten sind nicht klassisch (Stoßtheorie) vorhersagbar

**Gibt es in der Physik mikroskopische Analoga zu den kontinuierlichen Symmetrien von Emmy Noether? Wie sind Impuls- und Energieerhaltung mikroskopisch realisiert?**

**Für Ort/Raum und Impuls, ja, klar: Heisenbergs berühmte Unschärferelation, gilt für Standardmodell!**

$$\overline{(\Delta p_x)} \cdot \overline{(\Delta x)} \geq \frac{1}{2} \hbar$$

# Was verändert sich makroskopisch-mikroskopisch?

Phasen fest (Eis) und flüssig **räumlich getrennt**, Raum inhomogen, Zeit spielt keine Rolle. Mikroskopisch: Oszillierende Tröpfchen im Raum homogen verteilt, Zustände sind **zeitlich getrennt**. Nur Erwartungswerte für Verweilzeiten im jeweiligen Phasenzustand

Molekulare Reaktionszeiten sind nicht klassisch (Stoßtheorie) vorhersagbar

**Gibt es in der Physik mikroskopische Analoga zu den kontinuierlichen Symmetrien von Emmy Noether? Wie sind Impuls- und Energieerhaltung mikroskopisch realisiert?**

**Für Ort/Raum und Impuls, ja, klar: Heisenbergs berühmte Unschärferelation, gilt für Standardmodell!**

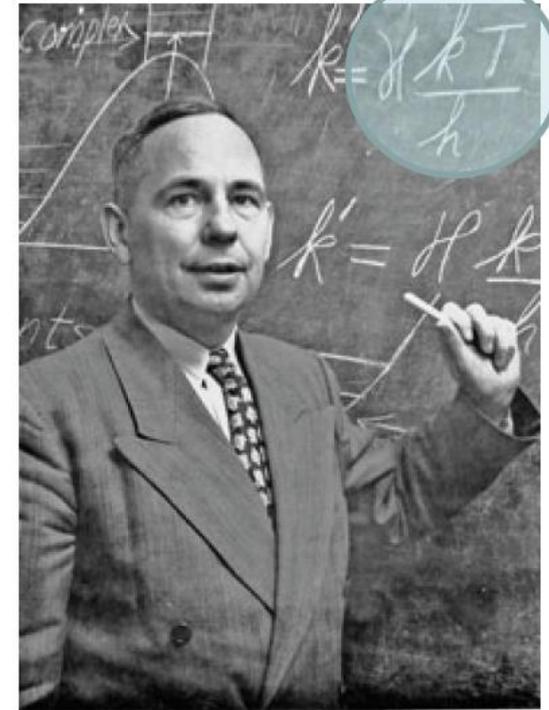
$$\overline{(\Delta p_x)} \cdot \overline{(\Delta x)} \geq \frac{1}{2} \hbar$$

**Existiert ein Pendant für Energie und Zeit?**

# Für Energie und Zeit: Eyrings Frequenzfaktor (1935)

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} \leq E \frac{E_{aktiv}}{h} \frac{q_{TST}}{q_{Molekuel}} e^{\frac{\Delta E_0}{k_B T}}$$

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} \leq E \frac{E_{aktiv}}{h}$$



**Verallgemeinerte Deutung:**

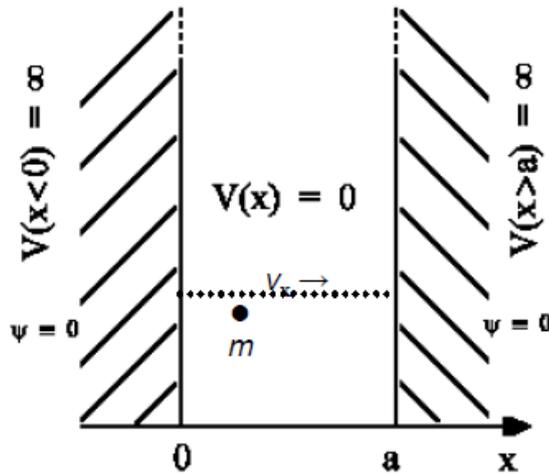
Eyring, Henry (1935): *The activated complex in chemical reactions*. J. Chem. Phys. 3: 107–115

**Limitiert Zerfallsrate/Energiefluss aus transienten QM-Systemen**

**Funktion der Energie im System, Grenze bei hohen Energien wirksam! (Korrespondenzprinzip?)**

# Heisenberg zeigt sich am deutlichsten bei kleinem Volumen (z.B. Molekül) und niedrigster möglicher Energie

## 3.1. Das Teilchen im Kasten



Wände stoßen Teilchen elastisch (verlustlos)  
 → klass. Bild

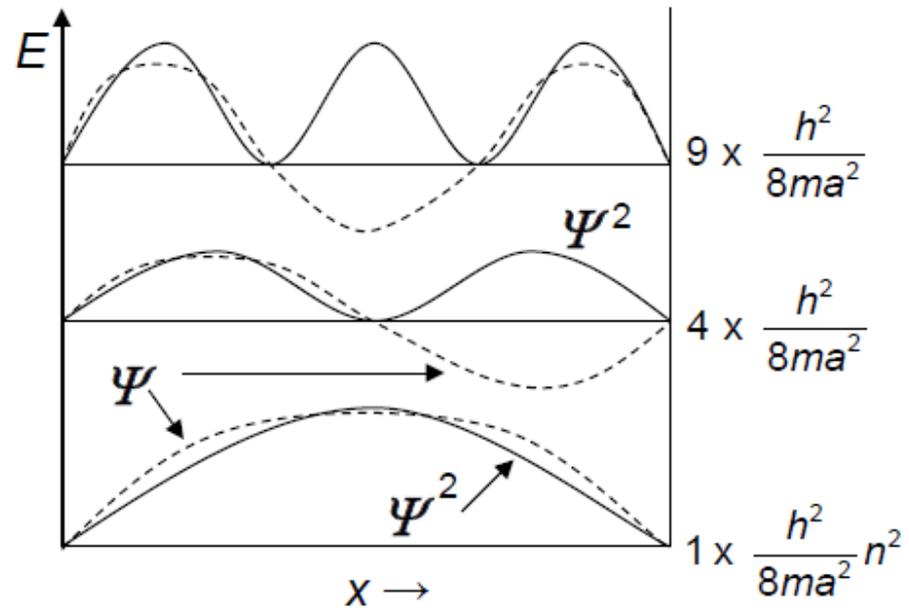
klassisch:  $\frac{m}{2} v^2 = p^2 \frac{1}{2m}, V(x)=0; 0 \leq x \leq a;$   
 $= \infty; 0 < x, x > a$

QM: Schrödinger-Gleichung

1d:  $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi$   
 $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi$  \*

----- Wellenfunktion  
 ——— Aufenthaltswahrscheinlichkeit

Bornsche Deutung

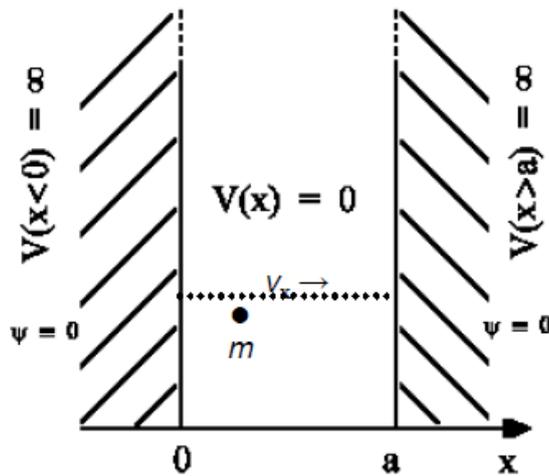


Kinetische Nullpunktenergie

$$(\overline{\Delta p_x}) \cdot (\overline{\Delta x}) \geq \frac{1}{2} \hbar$$

# Heisenberg zeigt sich am deutlichsten bei kleinem Volumen (z.B. Molekül) und niedrigster möglicher Energie

## 3.1. Das Teilchen im Kasten



Wände stoßen Teilchen elastisch (verlustlos)  
 → klass. Bild

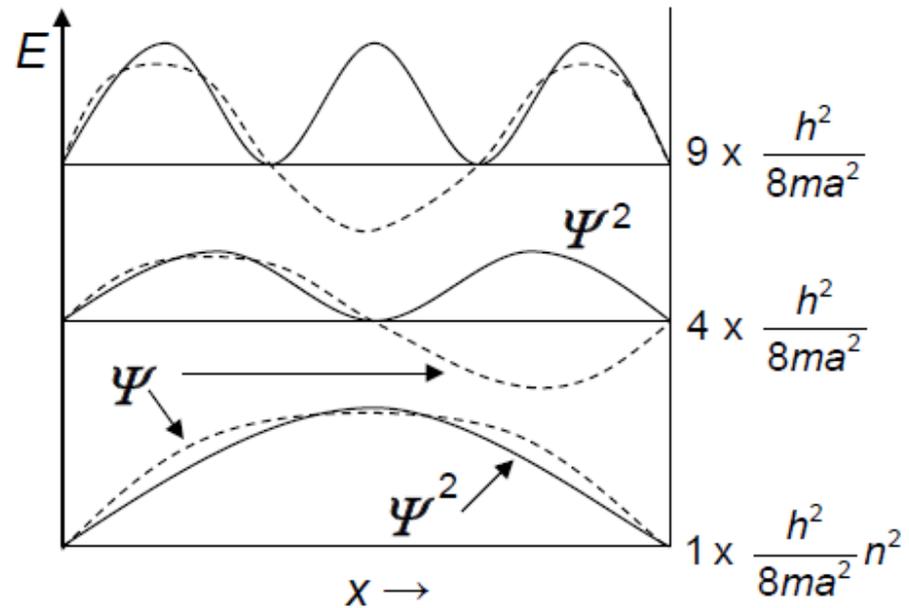
klassisch:  $\frac{m}{2} v^2 = p^2 \frac{1}{2m}, V(x)=0; 0 \leq x \leq a;$   
 $= \infty; 0 < x, x > a$

QM: Schrödinger-Gleichung

1d:  $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi$   
 $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi$  \*

----- Wellenfunktion  
 ——— Aufenthaltswahrscheinlichkeit

Bornsche Deutung

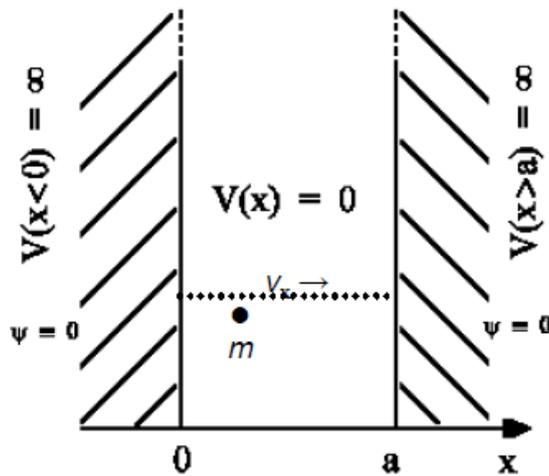


Kinetische Nullpunktenergie

$$(\overline{\Delta p_x}) \cdot (\overline{\Delta x}) = \frac{1}{2} \hbar$$

# Heisenberg zeigt sich am deutlichsten bei kleinem Volumen (z.B. Molekül) und niedrigster möglicher Energie

## 3.1. Das Teilchen im Kasten



Wände stoßen Teilchen elastisch (verlustlos)  
 → klass. Bild

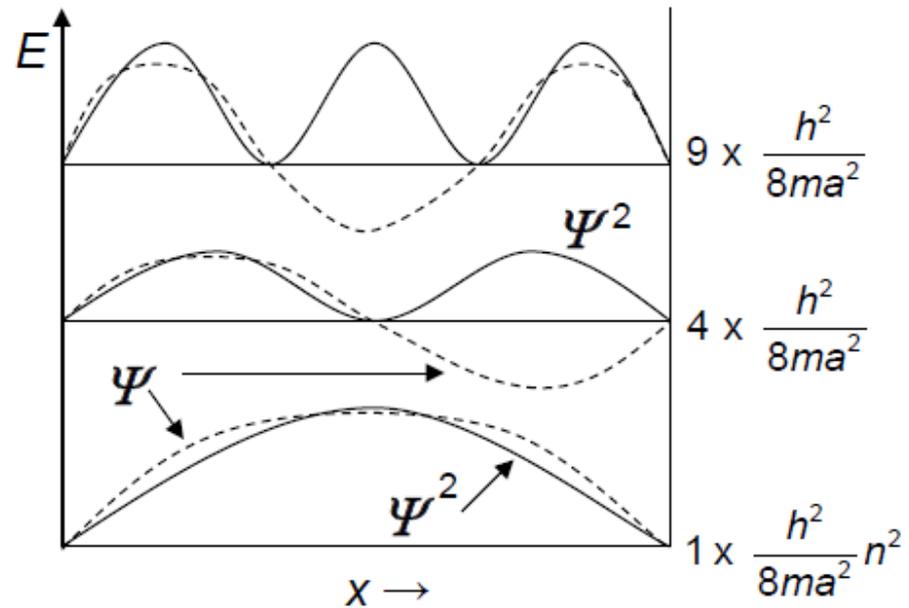
klassisch:  $\frac{m}{2} v^2 = p^2 \frac{1}{2m}, V(x)=0; 0 \leq x \leq a;$   
 $= \infty; 0 < x, x > a$

QM: Schrödinger-Gleichung

1d:  $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi$   
 $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi$  \*

----- Wellenfunktion  
 ——— Aufenthaltswahrscheinlichkeit

Bornsche Deutung

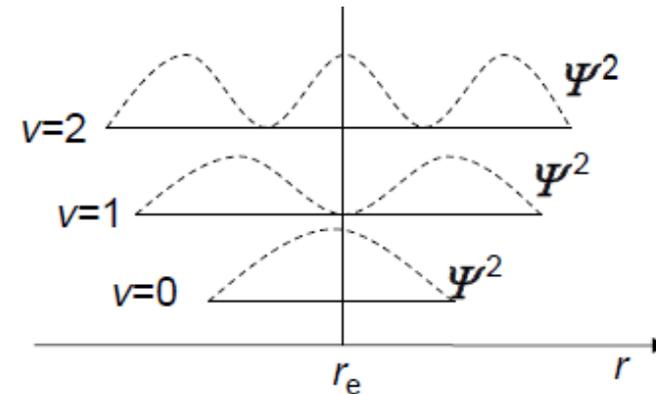
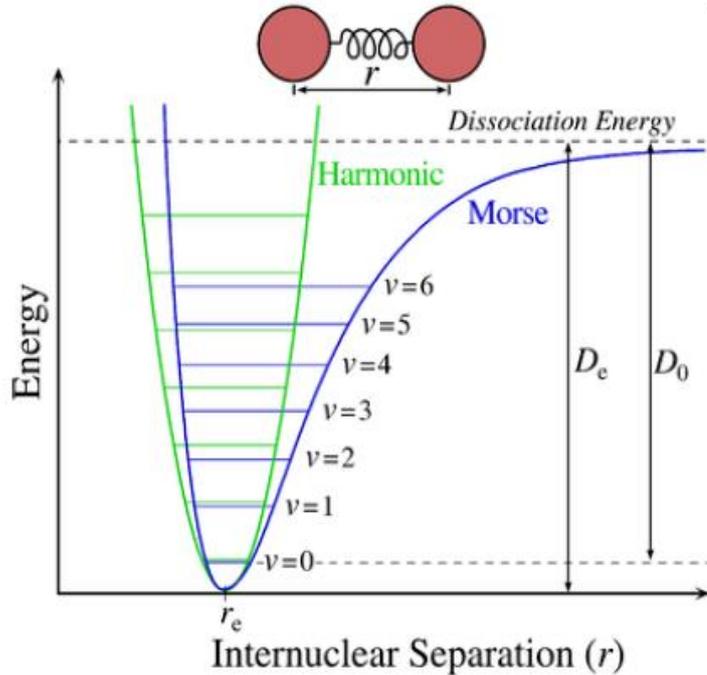


Kinetische Nullpunktenergie

$$(\overline{\Delta p_x}) \cdot (\overline{\Delta x}) = \frac{1}{2} \hbar \Rightarrow E_1 = h^2 / 8ma^2$$

# Heisenberg beim Quantenoszillator und Rotator

## Oszillator: harmonisch, anharmonisch



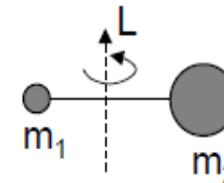
$$h\nu_{\text{Licht}} = E_{v+1} - E_v = h\nu \left\{ \left( v + 1 + \frac{1}{2} \right) - \left( v + \frac{1}{2} \right) \right\} = h\nu_{\text{Oszill}}$$

Anregungsfrequenz (Frequenz, mit der elm. Welle schwingt) ist so zu wählen, dass sie **exakt** der „Schwingungsfrequenz“ des anzuregenden Oszillators entspricht.

Energieaufnahme QM-Oszillator

## Starrer Rotator, harmonisch

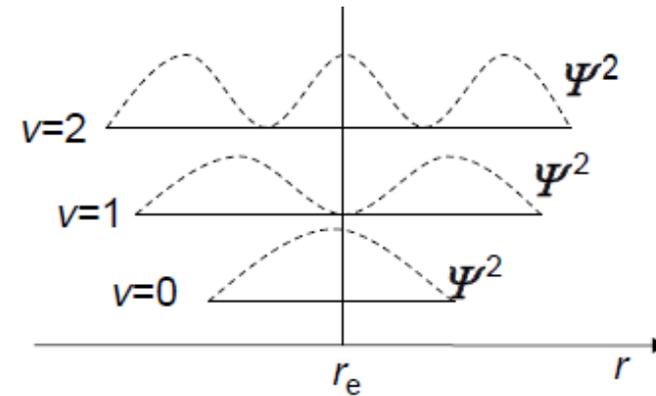
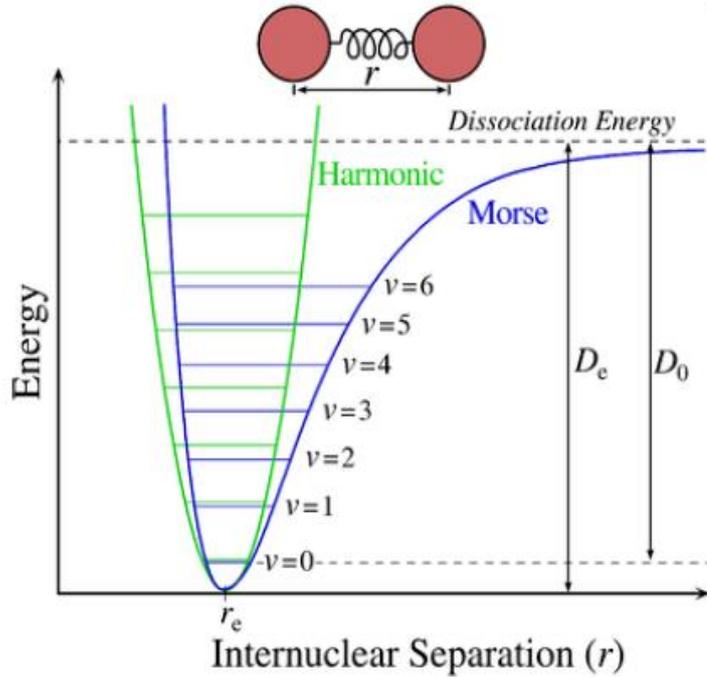
$$\text{Drehimpuls: } \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$



$$E_{\text{Kin}} = \frac{1}{2} m_{\text{red}} (r\omega)^2 = \frac{1}{2} I\omega^2 \quad I = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} r_e^2 = m_{\text{red}} \cdot r_e^2$$

# Heisenberg beim Quantenoszillator und Rotator

## Oszillator: harmonisch, anharmonisch



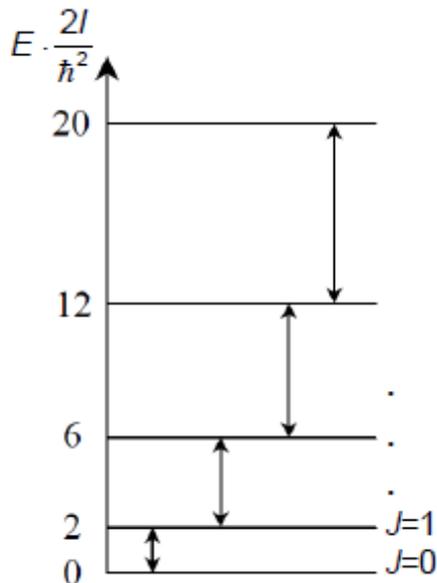
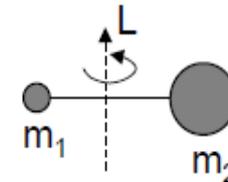
$$h\nu_{\text{Licht}} = E_{v+1} - E_v = h\nu \left\{ \left( v + 1 + \frac{1}{2} \right) - \left( v + \frac{1}{2} \right) \right\} = h\nu_{\text{Oszill}}$$

Anregungsfrequenz (Frequenz, mit der elm. Welle schwingt) ist so zu wählen, dass sie **exakt** der „Schwingungsfrequenz“ des anzuregenden Oszillators entspricht.

Energieaufnahme QM-Oszillator

## Starrer Rotator, harmonisch

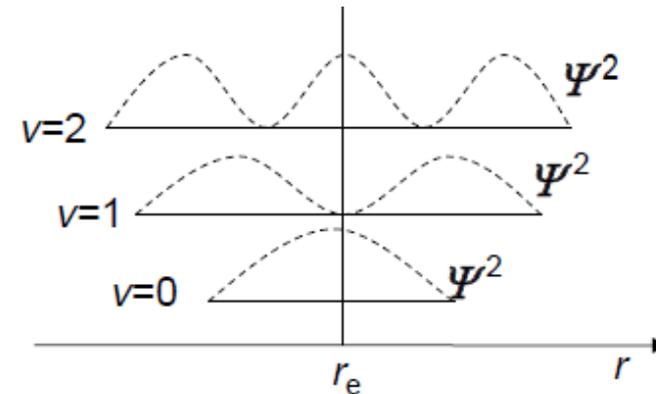
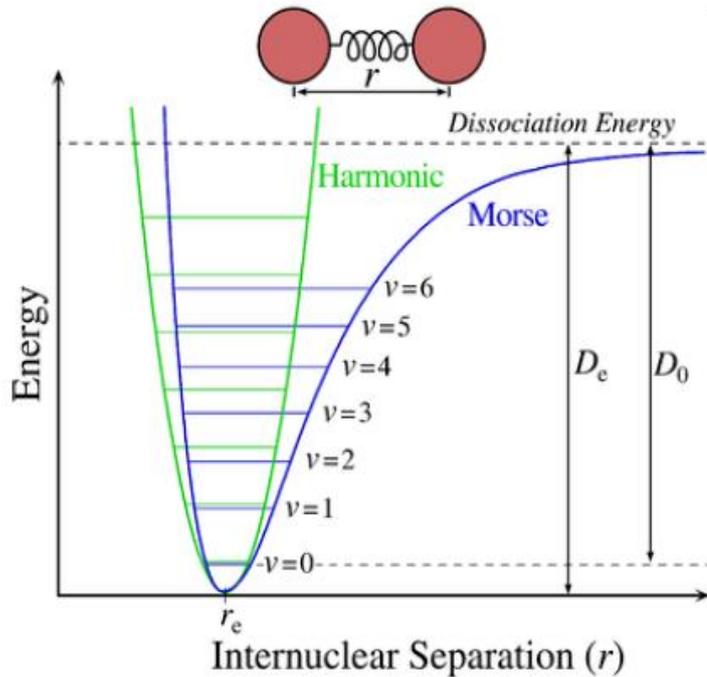
Drehimpuls:  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$



$$E_{\text{Kin}} = \frac{1}{2} m_{\text{red}} (r\omega)^2 = \frac{1}{2} I\omega^2 \quad I = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} r_e^2 = m_{\text{red}} \cdot r_e^2$$

# Heisenberg beim Quantenoszillator und Rotator

## Oszillator: harmonisch, anharmonisch



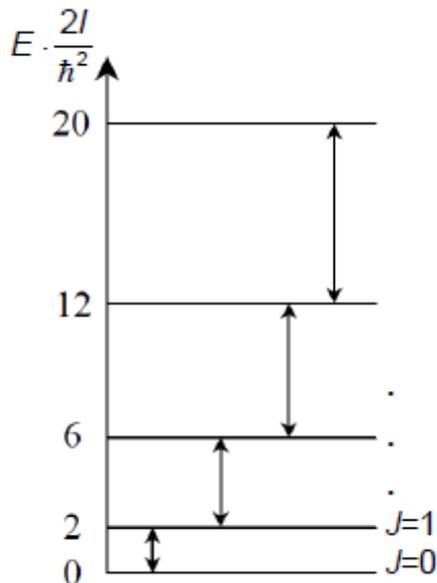
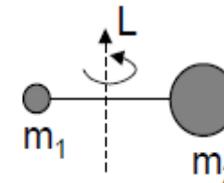
$$h\nu_{\text{Licht}} = E_{v+1} - E_v = h\nu \left\{ \left( v + 1 + \frac{1}{2} \right) - \left( v + \frac{1}{2} \right) \right\} = h\nu_{\text{Oszill}}$$

Anregungsfrequenz (Frequenz, mit der elm. Welle schwingt) ist so zu wählen, dass sie **exakt** der „Schwingungsfrequenz“ des anzuregenden Oszillators entspricht.

Energieaufnahme QM-Oszillator

## Starrer Rotator, harmonisch

$$\text{Drehimpuls: } \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

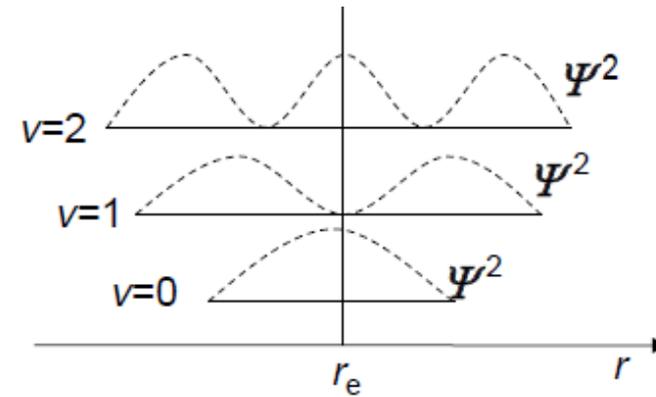
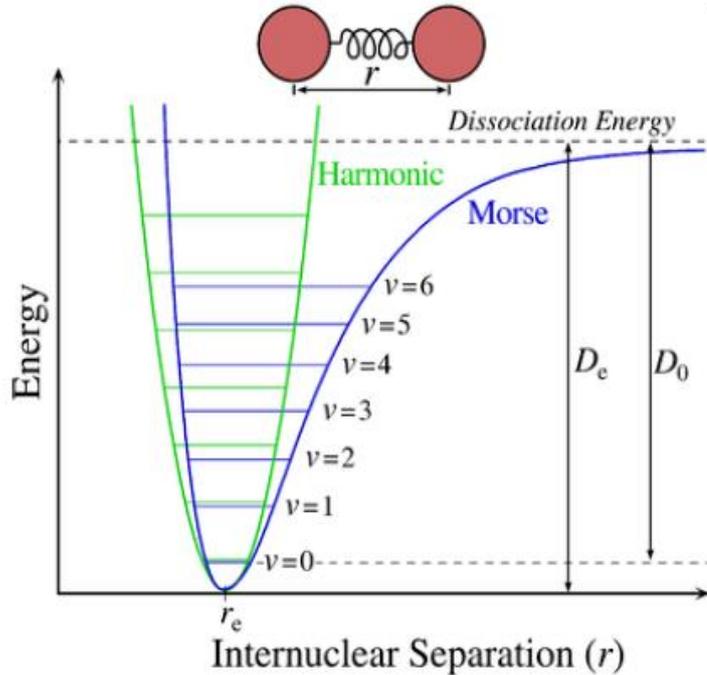


$$E_{\text{Kin}} = \frac{1}{2} m_{\text{red}} (r\omega)^2 = \frac{1}{2} I\omega^2 \quad I = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} r_e^2 = m_{\text{red}} \cdot r_e^2$$

Keine Nullpunktsenergie!

# Heisenberg beim Quantenoszillator und Rotator

## Oszillator: harmonisch, anharmonisch

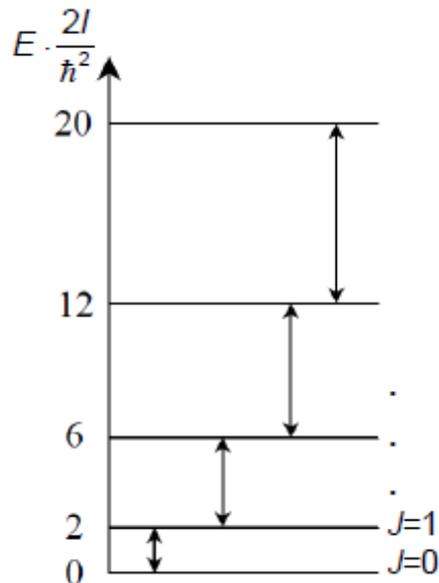


$$h\nu_{\text{Licht}} = E_{v+1} - E_v = h\nu \left\{ \left( v + 1 + \frac{1}{2} \right) - \left( v + \frac{1}{2} \right) \right\} = h\nu_{\text{Oszill}}$$

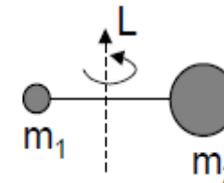
Anregungsfrequenz (Frequenz, mit der elm. Welle schwingt) ist so zu wählen, dass sie **exakt** der „Schwingungsfrequenz“ des anzuregenden Oszillators entspricht.

Energieaufnahme QM-Oszillator

## Starrer Rotator, harmonisch



Drehimpuls:  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$



$$E_{\text{Kin}} = \frac{1}{2} m_{\text{red}} (r\omega)^2 = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad I = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} r_e^2 = m_{\text{red}} \cdot r_e^2$$

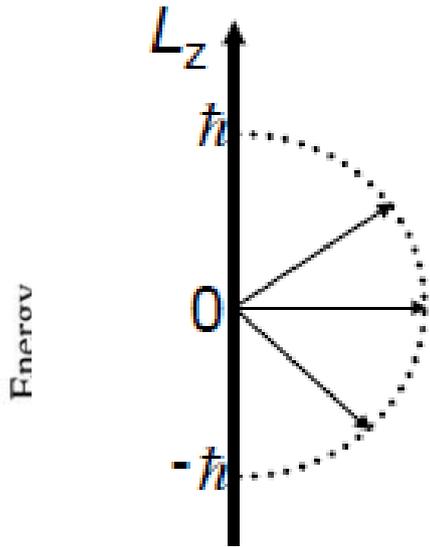
Keine Nullpunktsenergie!

**2 Freiheitsgrade für Orientierung der imaginären(!) Drehachse: Scharfe Energie!**

# Heisenberg beim Quantenoszillator und Rotator

## (4) Drehimpulsorientierung ist gequantelt

1



$$|L| = \hbar \cdot \sqrt{J(J+1)} \quad ; \quad \text{für } J=1: L = \hbar \cdot \sqrt{2}$$

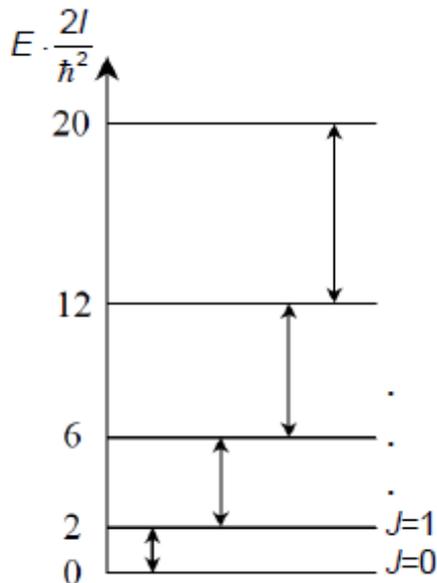
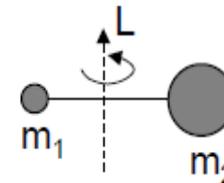
$$L_z = \pm |\hbar| \cdot m \quad \quad L_z = \begin{cases} +\hbar \\ 0 \\ -\hbar \end{cases}$$

$r_e$   
Internuclear Separation ( $r$ )

dass sie **exakt** der „Schwingungsfrequenz“  
des anzuregenden **Oszillators** entspricht.

## Starrer Rotator, harmonisch

Drehimpuls :  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

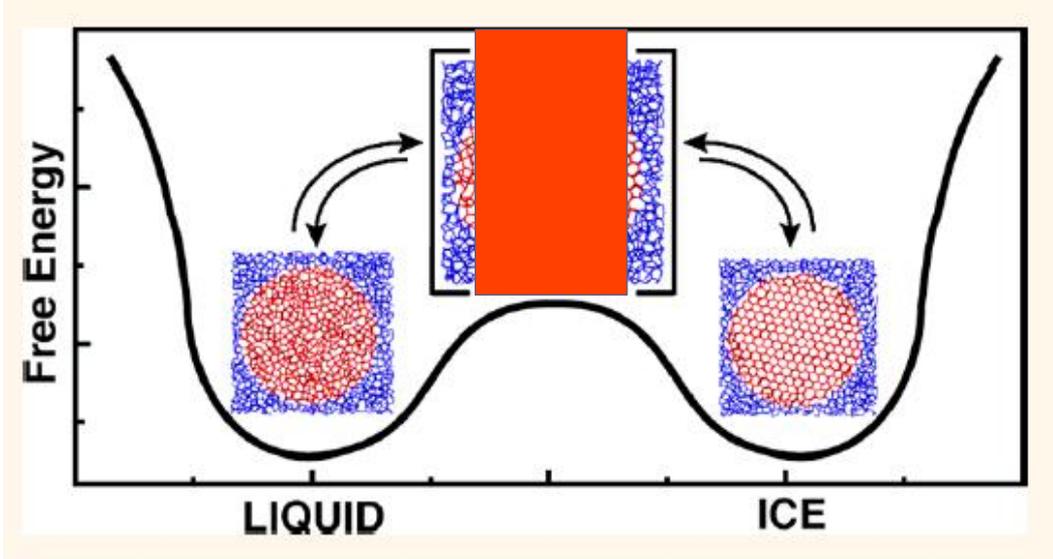


$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_{\text{red}} (r\omega)^2 = \frac{1}{2} I\omega^2 \quad I = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} r_e^2 = m_{\text{red}} \cdot r_e^2$$

Keine Nullpunktsenergie!

**2 Freiheitsgrade für Orientierung der imaginären(!) Drehachse: Scharfe Energie!**

# Quantenmechanische Deutung von Eyring



## Stationär:

Gekoppelte Quantenoszillatoren.  
Sind im Potentialtopf gefangen.  
Stabile mechanische  
Gesamtwellenfunktion/Amplitude.  
Phase **imaginär, nicht messbar**

$$\hat{H}\psi = E\psi.$$

Die Schrödingergleichung reduziert sich in diesem Fall auf

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = E\psi$$

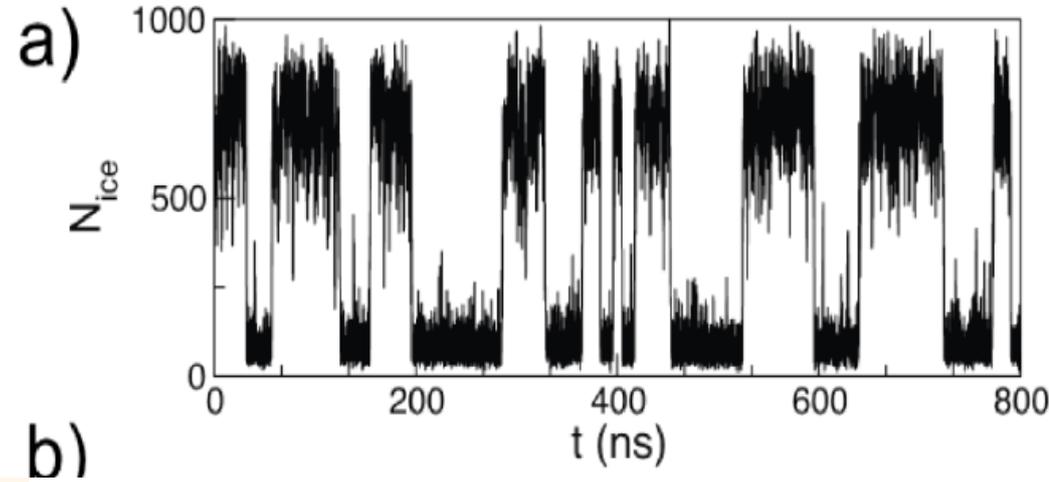
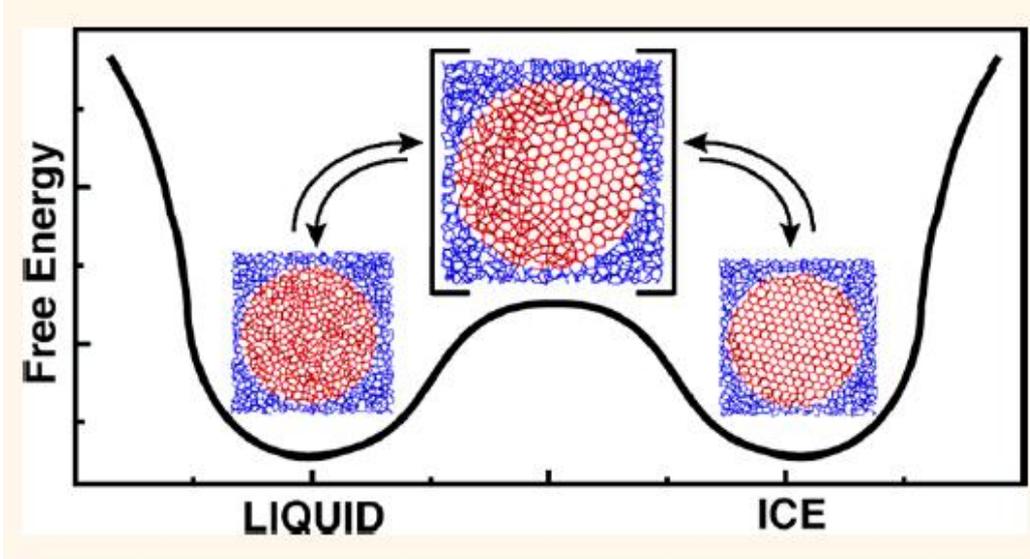
und hat die Lösung

$$\psi(t) = \psi(0) \cdot e^{-i \frac{E}{\hbar} t}.$$

Wikipedia: Hauptartikel

QM

# Quantenmechanische Deutung von Eyring



$$\hat{H}\psi = E\psi.$$

Die Schrödingergleichung reduziert sich in diesem Fall auf

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = E\psi$$

und hat die Lösung

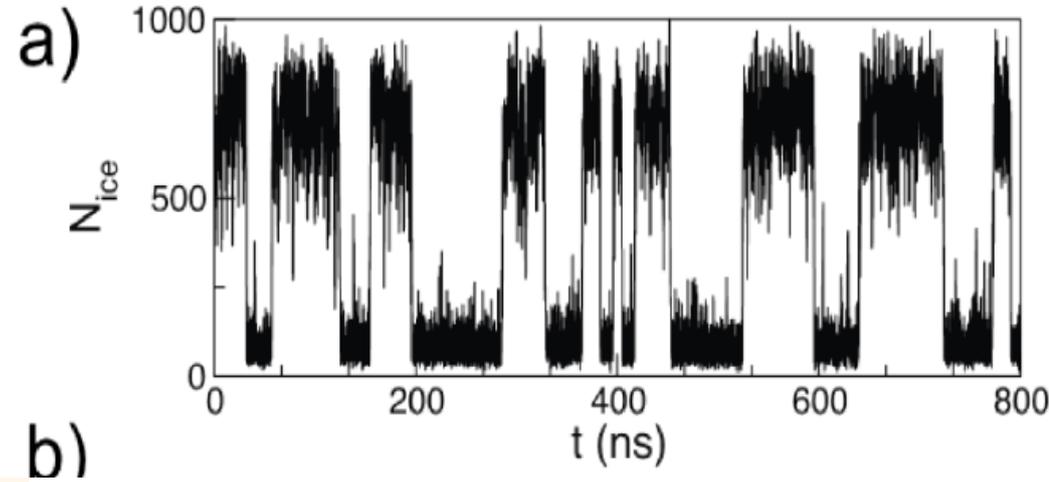
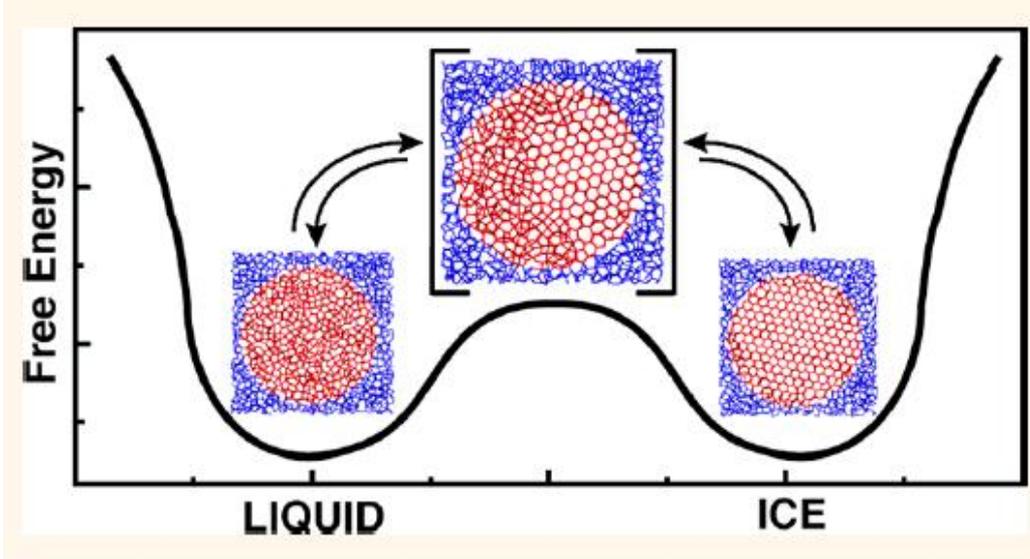
$$\psi(t) = \psi(0) \cdot e^{-i \frac{E}{\hbar} t}.$$

## Quasistationär:

Gekoppelte Quantenoszillatoren, sind nur noch quasi im Potentialtopf gefangen. Instabile mechanische Gesamtwellenfunktion/Amplitude. Phase wird **real, messbar!**

Begrenzt die Zerfallsrate, die Amplitude verschwindet

# Quantenmechanische Deutung von Eyring



$$\frac{\Delta E}{\Delta t} \leq E \frac{E_{aktiv}}{h} \quad \text{Für großes Ensemble}$$

$$\Psi(t) \geq \Psi(t_0) \cdot e^{-\frac{E}{h} \cdot t}$$

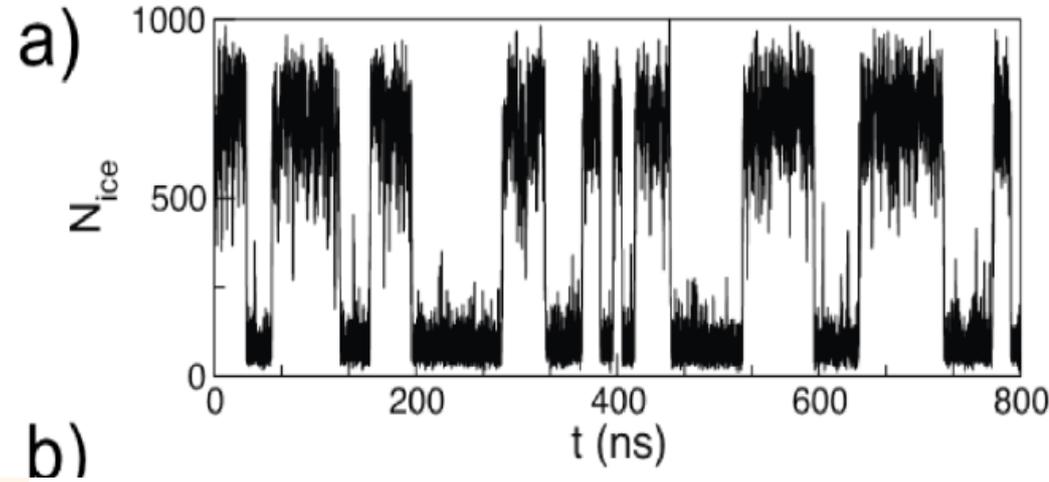
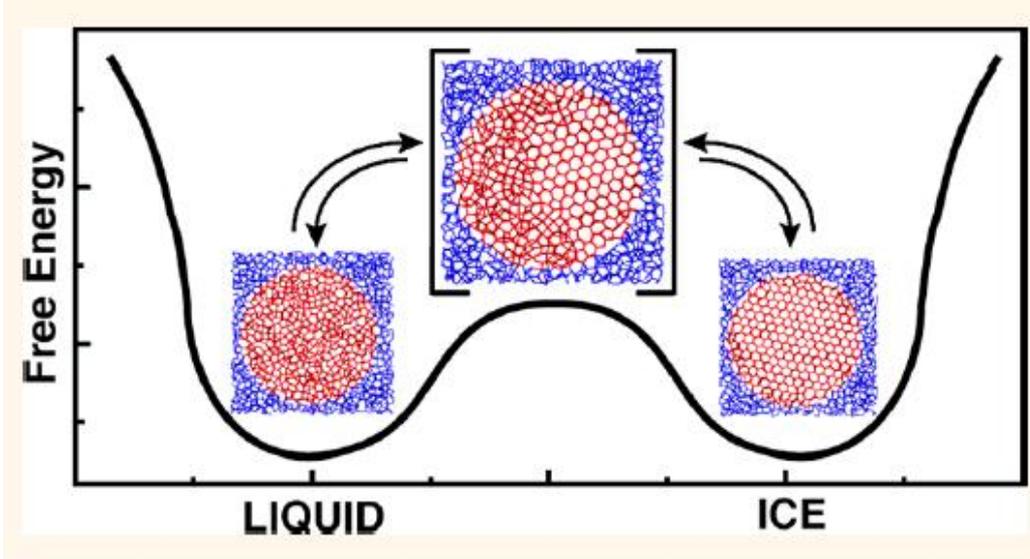
$$\Psi(t) = \Psi(t_0) \cdot e^{-\frac{E}{h} \cdot t \cdot p(\text{Aktivierung})}$$

$$p(\text{Aktivierung}) = \frac{q_{TST}}{q_{Molekuel}} e^{-\frac{\Delta E_0}{k_B T}}$$

## Quasistationär:

Gekoppelte Quantenoszillatoren, sind nur noch quasi im Potentialtopf gefangen. Instabile mechanische Gesamtwellenfunktion/Amplitude. Phase wird **real, messbar!** Begrenzt die Zerfallsrate, die Amplitude verschwindet

# Quantenmechanische Deutung von Eyring



$$\frac{\Delta E}{\Delta t} \leq E \frac{E_{aktiv}}{h} \quad \text{Für großes Ensemble}$$

$$\Psi(t) \geq \Psi(t_0) \cdot e^{-\frac{E}{h} \cdot t} \quad e^{-i \frac{E}{\hbar} t}$$

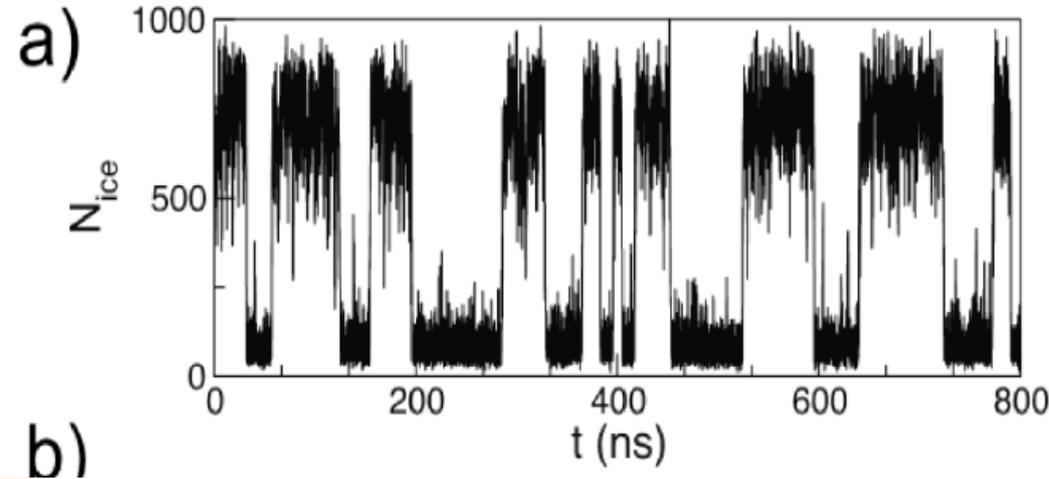
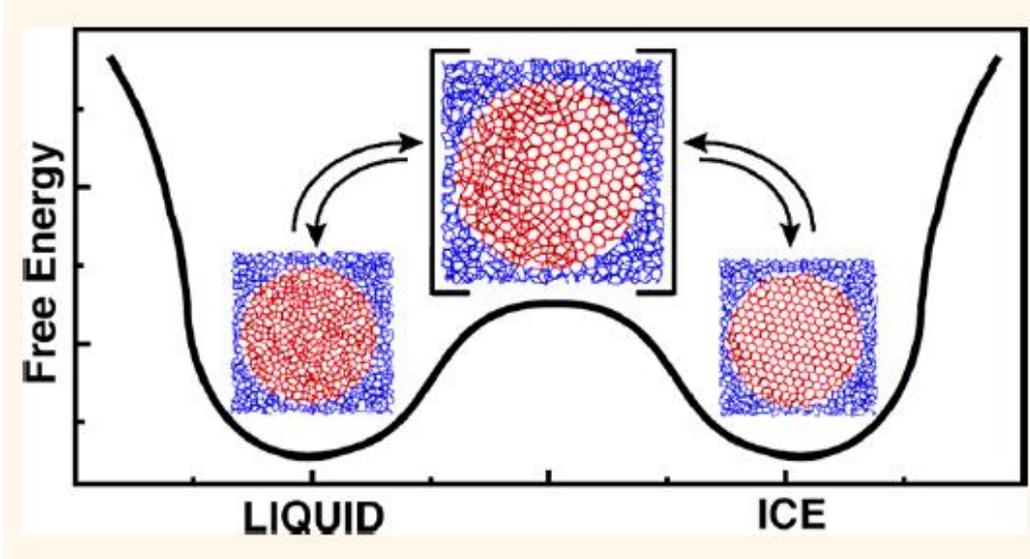
$$\Psi(t) = \Psi(t_0) \cdot e^{-\frac{E}{h} \cdot t \cdot p(\text{Aktivierung})}$$

$$p(\text{Aktivierung}) = \frac{q_{TST}}{q_{Molekuel}} e^{-\frac{\Delta E_0}{k_B T}}$$

## Quasistationär:

Gekoppelte Quantenoszillatoren, sind nur noch quasi im Potentialtopf gefangen. Instabile mechanische Gesamtwellenfunktion/Amplitude. Phase wird **real, messbar!** Begrenzt die Zerfallsrate, die Amplitude verschwindet

# Quantenmechanische Deutung von Eyring



$$\frac{\Delta E}{\Delta t} \leq E \frac{E_{aktiv}}{h}$$

Für großes Ensemble



$$\Psi(t) \geq \Psi(t_0) \cdot e^{-\frac{E}{h} \cdot t} \quad e^{-i \frac{E}{\hbar} t}$$

$$\Psi(t) = \Psi(t_0) \cdot e^{-\frac{E}{h} \cdot t \cdot p(\text{Aktivierung})}$$

$$p(\text{Aktivierung}) = \frac{q_{TST}}{q_{Molekuel}} e^{-\frac{\Delta E_0}{k_B T}}$$

## Quasistationär:

Gekoppelte Quantenoszillatoren, sind nur noch quasi im Potentialtopf gefangen. Instabile mechanische Gesamtwellenfunktion/Amplitude. Phase wird **real, messbar!** Begrenzt die Zerfallsrate, die Amplitude verschwindet

# Quantenmechanik und Gravitation (Arbeitshypothesen)

**Zeitdilatation gravitativ:**

Zeitdilatation ist Funktion der lokalen Gravitationskraft:

**Zeitdilatation**

**Stationär:**

Schwarzschildmetrik bestimmt Zeitdilatation

Zeitdilatation wirkt auf Phasengeschwindigkeit

$$\frac{dt}{d\tau} = \sqrt{g^{tt}}$$

$$\Psi(t) = \Psi(t_0) \cdot e^{-\frac{E}{\hbar} \cdot t \cdot p(\text{Aktivierung})}$$

**Maximale Phasengeschwindigkeit:**

Planckzeit ist kürzester Zeitschritt

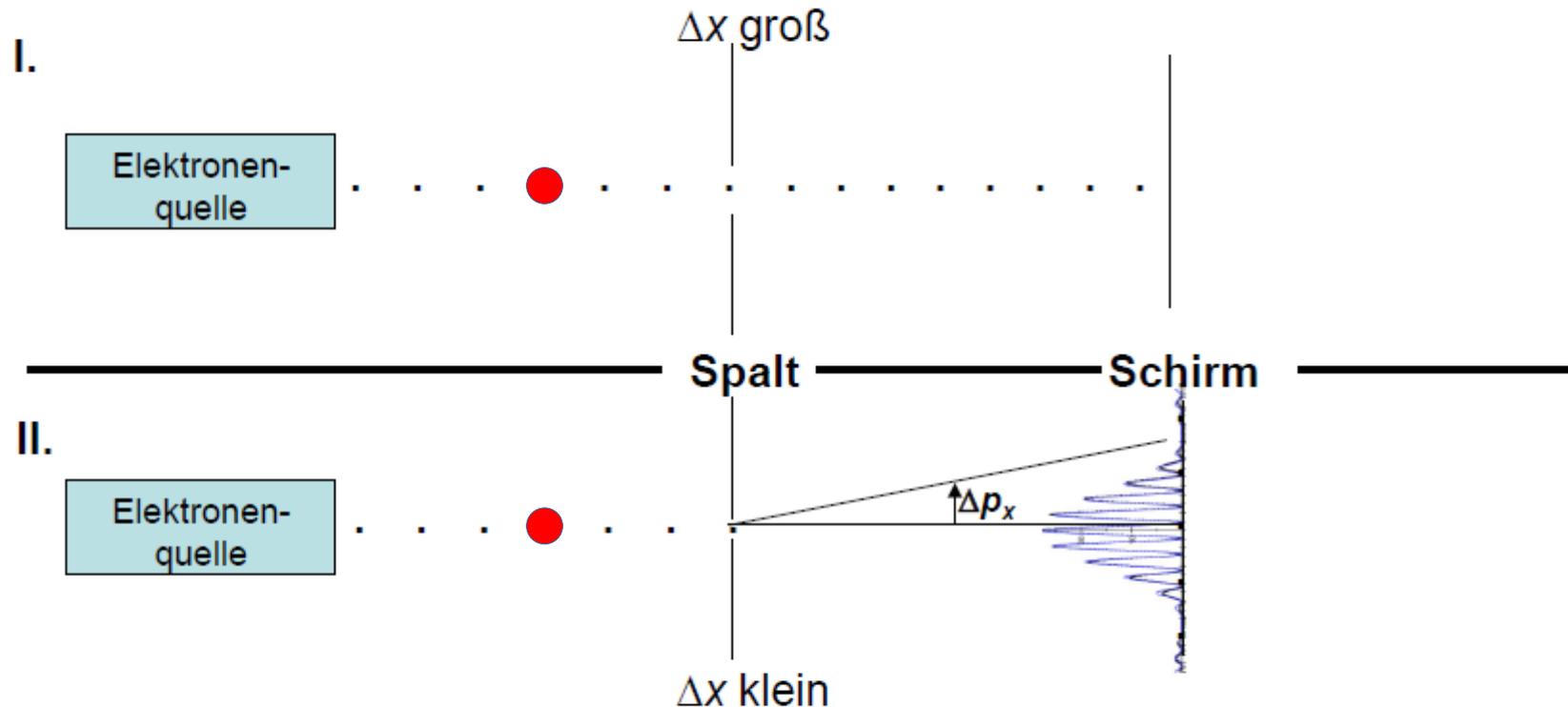
$$\frac{\Delta E}{\Delta t} \leq E_{Vmin} \sqrt{\frac{c^5}{G\hbar}}$$

Praktisch instantane Relaxation bei einer Quantenverschränkung

(Informationskopplung, relative Orientierung relaxiert, keine Massen, Orte, Energien)

# Quantenmechanische Deutung von Eyring / Heisenberg

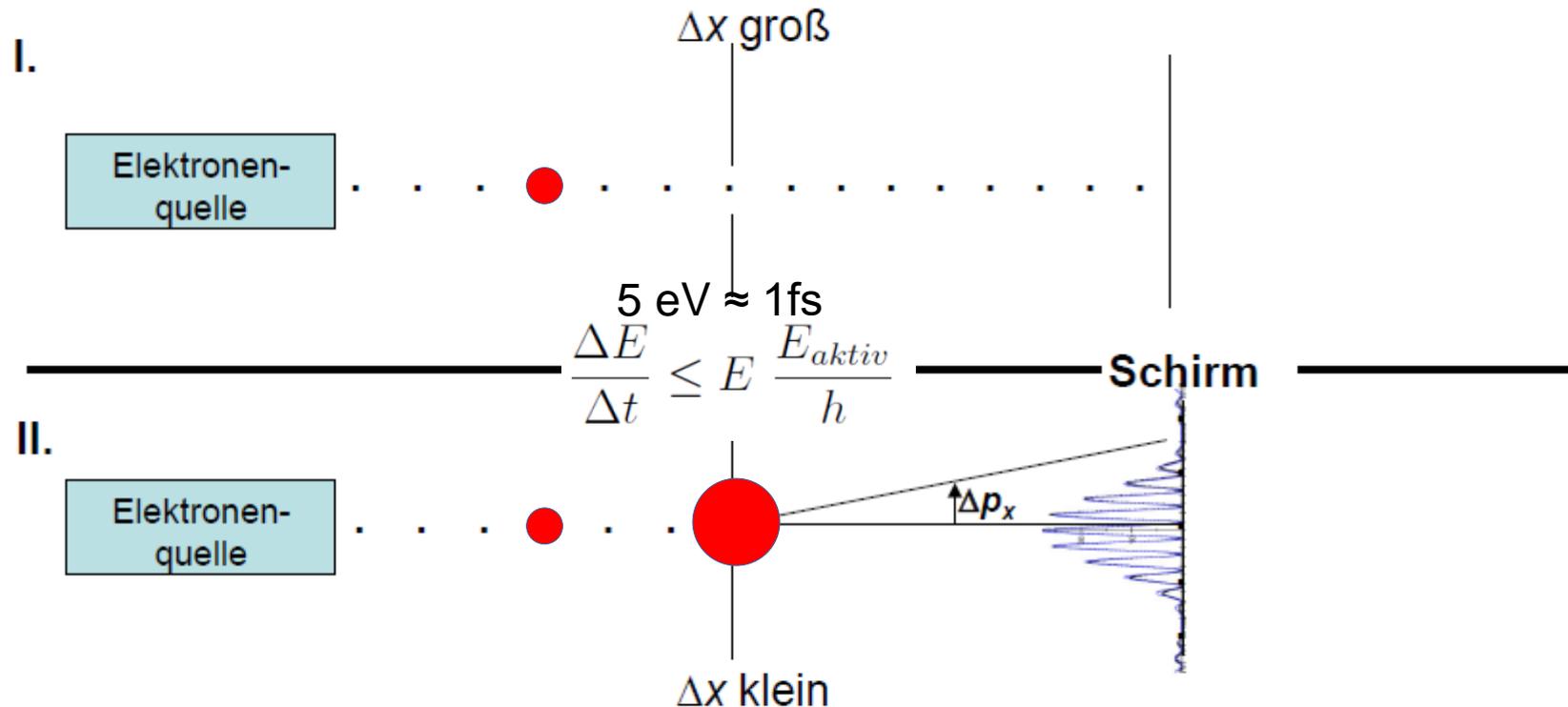
Beispiel: Nur Elektronen mit definiertem Impuls verlassen die Quelle



- I. Spalt der Breite  $\Delta x \rightarrow$  Ortsfestlegung: wenn Spalt groß genug, fliegen Elektronen ungestört weiter bis auf den Schirm.
- II. Bei kleinem Spalt werden Elektronen am Spalt abgelenkt, Beugungsmuster.  $\rightarrow$  kann zeitlich verfolgt, aber für Einzelereignis nicht vorhergesagt werden.  
 $\rightarrow$  es müssen so viele Experimente durchgeführt werden, dass eine statistische Auswertung erfolgen kann.

# Quantenmechanische Deutung von Eyring / Heisenberg

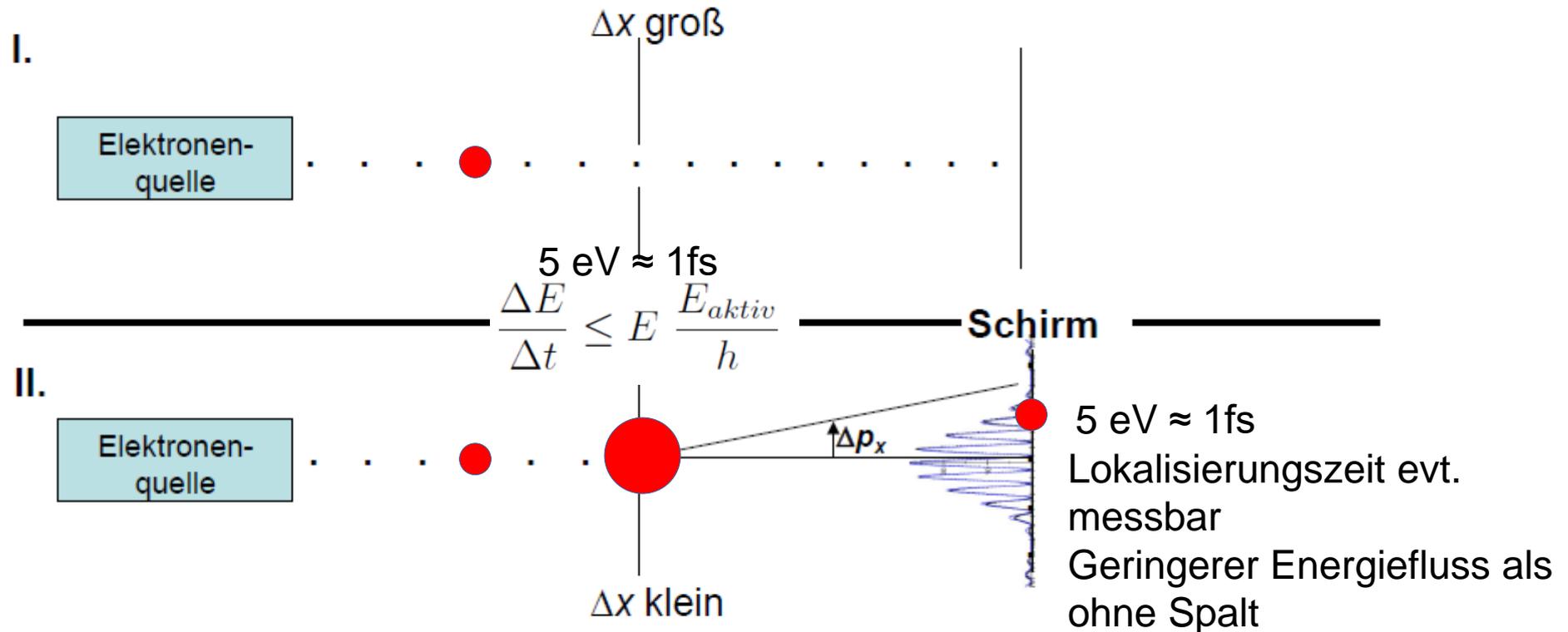
Beispiel: Nur Elektronen mit definiertem Impuls verlassen die Quelle



- I. Spalt der Breite  $\Delta x \rightarrow$  Ortsfestlegung: wenn Spalt groß genug, fliegen Elektronen ungestört weiter bis auf den Schirm.
- II. Bei kleinem Spalt werden Elektronen am Spalt abgelenkt, Beugungsmuster.  $\rightarrow$  kann zeitlich verfolgt, aber für Einzelereignis nicht vorhergesagt werden.  
 $\rightarrow$  es müssen so viele Experimente durchgeführt werden, dass eine statistische Auswertung erfolgen kann.

# Quantenmechanische Deutung von Eyring / Heisenberg

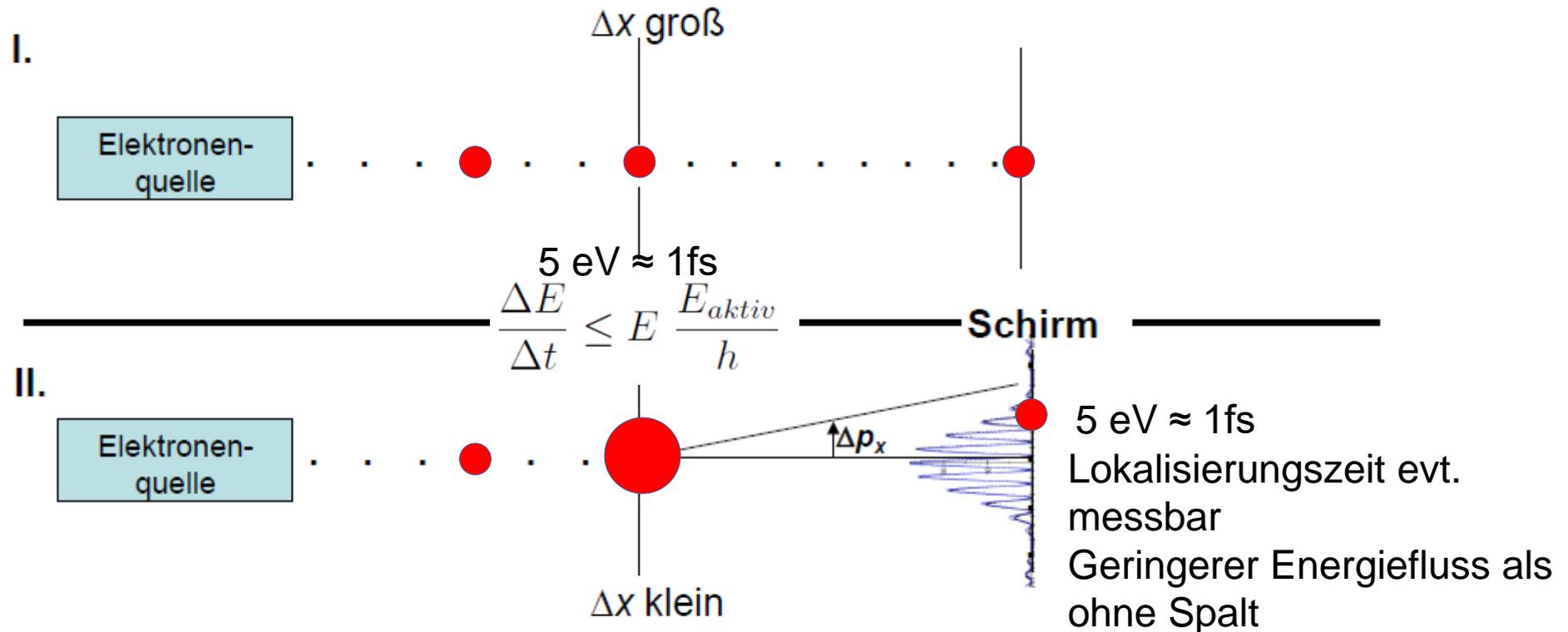
Beispiel: Nur Elektronen mit definiertem Impuls verlassen die Quelle



- I. Spalt der Breite  $\Delta x \rightarrow$  Ortsfestlegung: wenn Spalt groß genug, fliegen Elektronen ungestört weiter bis auf den Schirm.
- II. Bei kleinem Spalt werden Elektronen am Spalt abgelenkt, Beugungsmuster.  $\rightarrow$  kann zeitlich verfolgt, aber für Einzelereignis nicht vorhergesagt werden.  
 $\rightarrow$  es müssen so viele Experimente durchgeführt werden, dass eine statistische Auswertung erfolgen kann.

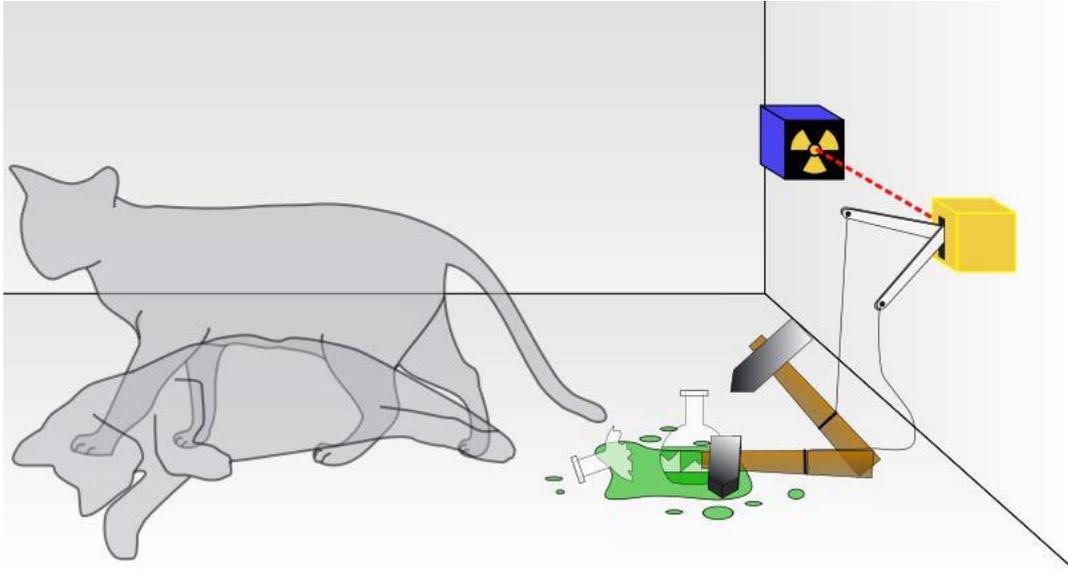
# Quantenmechanische Deutung von Eyring / Heisenberg

Beispiel: Nur Elektronen mit definiertem Impuls verlassen die Quelle



- I. Spalt der Breite  $\Delta x \rightarrow$  Ortsfestlegung: wenn Spalt groß genug, fliegen Elektronen ungestört weiter bis auf den Schirm.
- II. Bei kleinem Spalt werden Elektronen am Spalt abgelenkt, Beugungsmuster.  $\rightarrow$  kann zeitlich verfolgt, aber für Einzelereignis nicht vorhergesagt werden.  
 $\rightarrow$  es müssen so viele Experimente durchgeführt werden, dass eine statistische Auswertung erfolgen kann.

# Schrödingers Katze = aktiviertes Molekül



**Tierfreundliche Alternative: Weiße Katze wird beim Auslösen schwarz gesprüht**

$\omega = k_B T / \hbar$ : [s<sup>-1</sup>] Phasengeschwindigkeit  $f(T)$ ,  $k_B T / \hbar \cdot P(\text{Aktivierung}) = 1/1800$

**Reale Einzel-Amplitude:  $\psi(t)$  : schwarz oder weiß**

**Imaginäre Superposition unendlich vieler  $\psi(t)$  liefert scharfe Graustufe, aber Einzelmessung liefert nur schwarz oder weiß. Alternative z.B. ständiger Wechsel dunkle Ecke – helle Ecke**

**Erst Experiment mit z.B. 10000 Katzenboxen und synchronisiertem Start liefert sie zu fixierter Experimentdauer.**

**Experiment konkret: Öffnungsdauer und Sprühdauer durch  $k_B T / \hbar$  Phasen-limitiert: Picosekunden. Phasenuhren ticken in Relation unterschiedlich auf Erde/Mond/Neutronenstern**

## Zusammenfassung von Teil 2

Makroskopisch, mechanisch, thermodynamisch:

## Zusammenfassung von Teil 2

### Makroskopisch, mechanisch, thermodynamisch:

#### I. Zeithomogenität – Energieerhaltung, kontinuierliche Symmetrie

I. Hauptsatz für abgeschlossenes System, Grenzfläche dicht, Satz von Gauß: Netto keine inneren Energiequellen/-senken, Beobachter außen.

## **Zusammenfassung von Teil 2**

### **Makroskopisch, mechanisch, thermodynamisch:**

#### **I. Zeithomogenität – Energieerhaltung, kontinuierliche Symmetrie**

**I. Hauptsatz für abgeschlossenes System, Grenzfläche dicht, Satz von Gauß: Netto keine inneren Energiequellen/-senken, Beobachter außen.**

#### **II. Raumhomogenität – Impulserhaltung, kontinuierliche Symmetrie**

**Impulserhaltung im kräftefreien offenen System, Volumen homogen, Beobachter innen.**

## Zusammenfassung von Teil 2

### Makroskopisch, mechanisch, thermodynamisch:

#### I. Zeithomogenität – Energieerhaltung, kontinuierliche Symmetrie

I. Hauptsatz für abgeschlossenes System, Grenzfläche dicht, Satz von Gauß: Netto keine inneren Energiequellen/-senken, Beobachter außen.

#### II. Raumhomogenität – Impulserhaltung, kontinuierliche Symmetrie

Impulserhaltung im kräftefreien offenen System, Volumen homogen, Beobachter innen.

### Mikroskopisch, quanten- und statistisch mechanisch

## Zusammenfassung von Teil 2

### Makroskopisch, mechanisch, thermodynamisch:

#### I. Zeithomogenität – Energieerhaltung, kontinuierliche Symmetrie

I. Hauptsatz für abgeschlossenes System, Grenzfläche dicht, Satz von Gauß: Netto keine inneren Energiequellen/-senken, Beobachter außen.

#### II. Raumhomogenität – Impulserhaltung, kontinuierliche Symmetrie

Impulserhaltung im kräftefreien offenen System, Volumen homogen, Beobachter innen.

### Mikroskopisch, quanten- und statistisch mechanisch

#### III. Lokale Impulserhaltung

Heisenbergs Unschärferelation, bei langsamer Bewegung verschwommene mikroskopische Energielandschaften, Auflösungslimitierung, statistische Eigenschaft eines Ensembles, Messwerte sind immer reale Erwartungswerte von QM Amplituden (Zeit ausgeschlossen, hat keine Amplitude), Effekt stark bei niedrigen lokalen Energien.

## Zusammenfassung von Teil 2

### Makroskopisch, mechanisch, thermodynamisch:

#### I. Zeithomogenität – Energieerhaltung, kontinuierliche Symmetrie

I. Hauptsatz für abgeschlossenes System, Grenzfläche dicht, Satz von Gauß: Netto keine inneren Energiequellen/-senken, Beobachter außen.

#### II. Raumhomogenität – Impulserhaltung, kontinuierliche Symmetrie

Impulserhaltung im kräftefreien offenen System, Volumen homogen, Beobachter innen.

### Mikroskopisch, quanten- und statistisch mechanisch

#### III. Lokale Impulserhaltung

Heisenbergs Unschärferelation, bei langsamer Bewegung verschwommene mikroskopische Energielandschaften, Auflösungslimitierung, statistische Eigenschaft eines Ensembles, Messwerte sind immer reale Erwartungswerte von QM Amplituden (Zeit ausgeschlossen, hat keine Amplitude), Effekt stark bei niedrigen lokalen Energien.

#### IV. Lokale Energieerhaltung (Hypothese)

Eyrings Übergangszustandstheorie, Frequenzfaktor, QM Phasengeschwindigkeiten werden bei Übergängen reell und messbar, statistische Eigenschaft eines Ensembles, nur an Zeit und lokale Energie gekoppelt, Zeit koppelt an Gravitation(!), limitiert mikroskopischen Energiefluss bei hohen lokalen Energien, induziert scharfe Energieniveaus bei imaginärer Phase im stationären Quantensystem (analog: Imaginäre Drehachse im ruhenden Rotator) und unscharfe bei begrenzter Lebensdauer und hoher Energie.

## Zusammenfassung von Teil 2

### Makroskopisch, mechanisch, thermodynamisch:

#### I. Zeithomogenität – Energieerhaltung, kontinuierliche Symmetrie

I. Hauptsatz für abgeschlossenes System, Grenzfläche dicht, Satz von Gauß: Netto keine inneren Energiequellen/-senken, Beobachter außen.

#### II. Raumhomogenität – Impulserhaltung, kontinuierliche Symmetrie

Impulserhaltung im kräftefreien offenen System, Volumen homogen, Beobachter innen.

### Mikroskopisch, quanten- und statistisch mechanisch

#### III. Lokale Impulserhaltung

Heisenbergs Unschärferelation, bei langsamer Bewegung verschwommene mikroskopische Energielandschaften, Auflösungslimitierung, statistische Eigenschaft eines Ensembles, Messwerte sind immer reale Erwartungswerte von QM Amplituden (Zeit ausgeschlossen, hat keine Amplitude), Effekt stark bei niedrigen lokalen Energien.

#### IV. Lokale Energieerhaltung (Hypothese)

Eyrings Übergangszustandstheorie, Frequenzfaktor, QM Phasengeschwindigkeiten werden bei Übergängen reell und messbar, statistische Eigenschaft eines Ensembles, nur an Zeit und lokale Energie gekoppelt, Zeit koppelt an Gravitation(!), limitiert mikroskopischen Energiefluss bei hohen lokalen Energien, induziert scharfe Energieniveaus bei imaginärer Phase im stationären Quantensystem (analog: Imaginäre Drehachse im ruhenden Rotator) und unscharfe bei begrenzter Lebensdauer und hoher Energie.

**III. erzwingt IV. aus Symmetrienerhaltungsgründen, kontinuierlich - diskontinuierlich!**

## Zusammenfassung von Teil 1

### Lagrange-Mechanik, Nebenbedingungen, Zwangskräfte:

## Zusammenfassung von Teil 1

### Lagrange-Mechanik, Nebenbedingungen, Zwangskräfte:

I. Orthogonale Zerlegung des Definitionsbereichs in Bewegungsraum und Orientierungsraum durch Nebenbedingungen. Notwendiges Kriterium für Extrema unter Nebenbedingungen: Gradient der Funktion Element des Orientierungsraums

## Zusammenfassung von Teil 1

### Lagrange-Mechanik, Nebenbedingungen, Zwangskräfte:

I. Orthogonale Zerlegung des Definitionsbereichs in Bewegungsraum und Orientierungsraum durch Nebenbedingungen. Notwendiges Kriterium für Extrema unter Nebenbedingungen: Gradient der Funktion Element des Orientierungsraums

II. Nebenbedingungen definieren global und implizit Zwangskräfte, die lokal und explizit als „Pseudogradienten“ die Orientierung der Bewegung einschränken.

## Zusammenfassung von Teil 1

### Lagrange-Mechanik, Nebenbedingungen, Zwangskräfte:

I. Orthogonale Zerlegung des Definitionsbereichs in Bewegungsraum und Orientierungsraum durch Nebenbedingungen. Notwendiges Kriterium für Extrema unter Nebenbedingungen: Gradient der Funktion Element des Orientierungsraums

II. Nebenbedingungen definieren global und implizit Zwangskräfte, die lokal und explizit als „Pseudogradienten“ die Orientierung der Bewegung einschränken.

### Lokale, lineare Kinematik

## Zusammenfassung von Teil 1

### Lagrange-Mechanik, Nebenbedingungen, Zwangskräfte:

I. Orthogonale Zerlegung des Definitionsbereichs in Bewegungsraum und Orientierungsraum durch Nebenbedingungen. Notwendiges Kriterium für Extrema unter Nebenbedingungen: Gradient der Funktion Element des Orientierungsraums

II. Nebenbedingungen definieren global und implizit Zwangskräfte, die lokal und explizit als „Pseudogradienten“ die Orientierung der Bewegung einschränken.

### Lokale, lineare Kinematik

III. „Dynamisierung“ dieser orthogonalen Zerlegung. Zeitintegrationsschritt ist linear (Streck-Drehung) und liefert Wegelement. Bahn wird für unendlich kleine Zeitschritte stationär. Dynamisches Vektorfeld operiert linear, iterativ auf v-Vektoren: Differentielle Größen sind Längsbeschleunigung und Richtungsänderungsrate.

## Zusammenfassung von Teil 1

### Lagrange-Mechanik, Nebenbedingungen, Zwangskräfte:

I. Orthogonale Zerlegung des Definitionsbereichs in Bewegungsraum und Orientierungsraum durch Nebenbedingungen. Notwendiges Kriterium für Extrema unter Nebenbedingungen: Gradient der Funktion Element des Orientierungsraums

II. Nebenbedingungen definieren global und implizit Zwangskräfte, die lokal und explizit als „Pseudogradienten“ die Orientierung der Bewegung einschränken.

### Lokale, lineare Kinematik

III. „Dynamisierung“ dieser orthogonalen Zerlegung. Zeitintegrationsschritt ist linear (Streck-Drehung) und liefert Wegelement. Bahn wird für unendlich kleine Zeitschritte stationär. Dynamisches Vektorfeld operiert linear, iterativ auf v-Vektoren: Differentielle Größen sind Längsbeschleunigung und Richtungsänderungsrate.

IV. Natürliche Zwangskräfte zeigen in zeitlicher Expansion lokale Symmetriehaltung. Vertikalbeschleunigung aus  $\rightarrow$  Drehimpulserhaltung, Richtungsänderungsraten 0  $\rightarrow$  Schwerpunktimpulserhaltung. Zwangskräfte werden allgemein durch Löschung ihrer Komponenten kartesisch implementiert.

## Zusammenfassung von Teil 1

### Lagrange-Mechanik, Nebenbedingungen, Zwangskräfte:

I. Orthogonale Zerlegung des Definitionsbereichs in Bewegungsraum und Orientierungsraum durch Nebenbedingungen. Notwendiges Kriterium für Extrema unter Nebenbedingungen: Gradient der Funktion Element des Orientierungsraums

II. Nebenbedingungen definieren global und implizit Zwangskräfte, die lokal und explizit als „Pseudogradienten“ die Orientierung der Bewegung einschränken.

### Lokale, lineare Kinematik

III. „Dynamisierung“ dieser orthogonalen Zerlegung. Zeitintegrationsschritt ist linear (Streck-Drehung) und liefert Wegelement. Bahn wird für unendlich kleine Zeitschritte stationär. Dynamisches Vektorfeld operiert linear, iterativ auf v-Vektoren: Differentielle Größen sind Längsbeschleunigung und Richtungsänderungsrate.

IV. Natürliche Zwangskräfte zeigen in zeitlicher Expansion lokale Symmetriehaltung. Vertikalbeschleunigung aus  $\rightarrow$  Drehimpulserhaltung, Richtungsänderungsraten 0  $\rightarrow$  Schwerpunktimpulserhaltung. Zwangskräfte werden allgemein durch Löschung ihrer Komponenten kartesisch implementiert.

### Relativität (Hypothese)

# Zusammenfassung von Teil 1

## Lagrange-Mechanik, Nebenbedingungen, Zwangskräfte:

I. Orthogonale Zerlegung des Definitionsbereichs in Bewegungsraum und Orientierungsraum durch Nebenbedingungen. Notwendiges Kriterium für Extrema unter Nebenbedingungen: Gradient der Funktion Element des Orientierungsraums

II. Nebenbedingungen definieren global und implizit Zwangskräfte, die lokal und explizit als „Pseudogradienten“ die Orientierung der Bewegung einschränken.

### Lokale, lineare Kinematik

III. „Dynamisierung“ dieser orthogonalen Zerlegung. Zeitintegrationsschritt ist linear (Streck-Drehung) und liefert Wegelement. Bahn wird für unendlich kleine Zeitschritte stationär. Dynamisches Vektorfeld operiert linear, iterativ auf v-Vektoren: Differentielle Größen sind Längsbeschleunigung und Richtungsänderungsrate.

IV. Natürliche Zwangskräfte zeigen in zeitlicher Expansion lokale Symmetriehaltung. Vertikalbeschleunigung aus  $\rightarrow$  Drehimpulserhaltung, Richtungsänderungsraten 0  $\rightarrow$  Schwerpunktimpulserhaltung. Zwangskräfte werden allgemein durch Löschung ihrer Komponenten kartesisch implementiert.

### Relativität (Hypothese)

V. Zeitdilatation wirkt konstant auf Winkelgeschwindigkeiten (**Teil I+II: auch gravitativ auf QM-Phasengeschwindigkeit, wird bei Übergängen reellwertig und messbar**), Längenkontraktion konstant auf v-Komponente des bewegten Inertialsystems.

# Danksagung

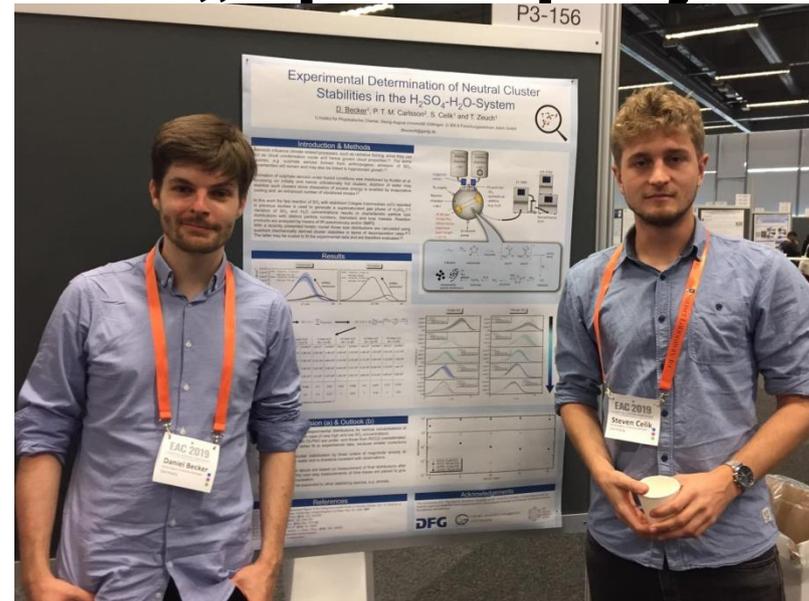
**Dozenten der Mathematik 1994-2003**

**Insbesondere Ina Kersten, Eckart Maus,  
Manfred Lehn, Ulrich Stuhler, Samuel Patterson,  
Herr Gnedin, Tammo tom Dieck etc.**

**Meine Mitarbeiter an diesem „Spezialprojekt“**



**Florian Zurheide**



**Daniel Becker**

**Steven Celik**